Interrogation écrite n°08

NOM : Prénom : Note :

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ puis que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

   Soit $x \in \mathrm{E}$. *Alors*

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathrm{Ker}(u^*) \\
\iff & u^*(x) = 0_{\mathrm{E}} \\
\iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\
\iff & \forall y \in \mathrm{E},\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \\
\iff & \forall z \in \mathrm{Im}(u),\ \langle x, z\rangle = 0 \\
\iff & x \in \mathrm{Im}(u)^\perp
\end{aligned}
$$

   Ainsi $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$. *En appliquant cette égalité à* u^*, *on obtient* $\mathrm{Ker}((u^*)^*) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$ *i.e.* $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$. *Or* E *est de dimension finie donc* $\mathrm{Ker}(u)^\perp = (\mathrm{Im}(u^*)^\perp)^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$. ∎

2. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. On note s la réflexion par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

   Notons que $a = (1,1,1)$ *est un vecteur normal à* P. *Ainsi le projeté orthogonal d'un vecteur* u *sur* $\mathrm{P}^\perp$ *est* $v = \dfrac{\langle u, a\rangle}{\|a\|^2}a = \dfrac{1}{3}\langle u, a\rangle a$ *puis* $s(u) = u - 2v$. *En notant* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *on trouve alors*

$$
\begin{aligned}
s(e_1) &= e_1 - \frac{2}{3}\langle e_1, a\rangle a = \frac{1}{3}(1, -2, -2) \\
s(e_2) &= e_2 - \frac{2}{3}\langle e_2, a\rangle a = \frac{1}{3}(-2, 1, -2) \\
s(e_3) &= e_2 - \frac{2}{3}\langle e_3, a\rangle a = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)
\end{aligned}
$$

   On en déduit que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ∎

3. On se donne deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Etablir que ces deux matrices sont semblables en utilisant l'endomorphisme u associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E.

   Comme la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est A*, on a* $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ *et* $u(e_3) = e_1$. *La matrice de u dans la base (e_2, e_1, e_3) est donc* B. *On en déduit que* A *et* B *sont semblables.* ∎

4. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x^2(1 - x^2)\}$ est-il une partie compacte de $\mathbb{R}^2$?

   L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2(1 - x^2)$ est polynomiale donc continue. Ainsi A *est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f. Soit $(x, y) \in$* A. *Alors* $x^2(1 - x^2) = y^2 \geq 0$ *donc* $x^2 \in [0, 1]$ *i.e.* $x \in [-1, 1]$. *De plus,* $y^2 = x^2(1 - x^2) \leq 1$ *donc* $y \in [-1, 1]$.
   Finalement $A \subset [-1, 1]^2$ *donc* A *est borné.*
   Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, A *est compact comme fermé borné de* $\mathbb{R}^2$. ∎