Interrogation écrite n°11

NOM : Prénom : Note :

1. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + e^t}$. Déterminer la limite de la suite (I_n).

   Posons $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{t^n + e^t}$.

   - *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue (par morceaux) sur* $\mathbb{R}_+$.
   - *La suite* (f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction* $f : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.
   - *La fonction* f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
   - *Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| = f_n(t) \le e^{-t}$ *et* $t \mapsto e^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

   D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-1}$$

∎

2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$.

   En posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *on a* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. *On calcule* $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 3 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$ *de sorte que* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 3\}$.

   On obtient facilement $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *et* $\mathrm{E}_3(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *On en déduit que l'ensemble des solutions du système* $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ *est*

$$\mathrm{vect}\left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   Autrement dit, (x, y) *est solution du système initial si et seulement si*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} \\ y(t) = -\lambda e^t + \mu e^{3t} \end{cases}$$

∎

3. Justifier que l'application $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale.

Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{t+1}$ *pour* $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ *donc* $x \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{te^{-tx}}{t+1}$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Donnons-nous* $a \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-ta}$$
et $t \mapsto e^{-ta}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

Ainsi F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

∎

4. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < e^{-t} < 1$ *de sorte que*

$$f(t) = \frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

avec $f_n : t \mapsto te^{-nt}$.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ *de sorte que* f_n *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *converge simplement vers* f *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\left[te^{-nt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Par coissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-nt} = 0$ *donc*

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

∎