Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire et norme

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. toute application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

Bilinéaire $\forall (x,y,z) \in E^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z) \\ \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \mu\varphi(y,z) \end{cases}$;

Symétrique $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;

Définie $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;

Positive $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$.

Notation 1.1

Le produit scalaire de deux éléments x et y de E se note généralement $(x \mid y)$, $\langle x \mid y \rangle$, (x,y) ou encore $\langle x, y \rangle$.

Remarque. Le produit scalaire en géométrie est bien un produit scalaire au sens de la définition précédente.

Méthode **Montrer qu'une application est un produit scalaire**

On procède généralement dans l'ordre suivant.

- On vérifie que l'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On montre la symétrie.
- On montre la linéarité par rapport à la première variable **ou** la seconde variable. La linéarité par rapport à l'autre variable découle de la symétrie.
- On montre la positivité.
- On finit par la «définition».

Exemple 1.1

On appelle produit scalaire **canonique** ou **usuel** sur $\mathbb{R}^n$ l'application

$$\begin{cases} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Exemple 1.2

L'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) & \longmapsto & \mathrm{X}^\top \mathrm{Y} \end{cases}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.3

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{cases} \mathrm{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt \end{cases}$$

est un produit scalaire.

Définition 1.2 Espace préhilbertien réel, espace euclidien

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un **produit scalaire**.
On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Définition 1.3

Soient E un espace vectoriel préhilbertien réel. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$. Dans ce cas, on note $x \perp y$.

Remarque. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 1.4

Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. L'application

$$\begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{(x \mid x)} \end{cases}$$

est appelée **norme associée** au produit scalaire $(. \mid .)$.

Notation 1.2

Une norme associée à un produit scalaire se note usuellement $\|.\|$.

Définition 1.5

Soit x un vecteur d'un espace préhilbertien réel. On dit que x est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Proposition 1.1 Relations entre produit scalaire et norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.\mid.)$ et d'une norme associée $\|.\|$. On a les relations suivantes :

Identités remarquables :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x\mid y) + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x\mid y) + \|y\|^2$$
$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y\mid x-y)$$

Identités de polarisation : $(x\mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Remarque. Les identités de polarisation permettent donc de retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Remarque. Si x et y sont de même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux. Géométriquement, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Proposition 1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(.\mid.)$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $\|.\|$ sa norme associée. Alors pour tous $x, y \in \mathrm{E}$:

$$|(x\mid y)| \leq \|x\|\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. Si l'on omet la valeur absolue, le cas d'égalité

$$(x\mid y) = \|x\|\|y\|$$

ne se produit que si x et y sont **positivement** colinéaires, autrement dit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\right)$$

Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$

Si $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ sont deux n-uplets de $\mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

Proposition 1.3 Propriétés de la norme euclidienne

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.\mid.)$ et d'une norme associée $\|.\|$.

Séparation $\forall x \in \mathrm{E}, \|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathrm{E}}$;

Homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

Inégalité triangulaire $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Norme

De manière générale, on appelle **norme** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

Séparation $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$;

Homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}, \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x)$;

Inégalité triangulaire $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

2 Familles orthogonales

2.1 Propriétés des familles orthogonales

Définition 2.1

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathrm{E}^{\mathrm{I}}$.

(i) On dit que la famille $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est **orthogonale** si les vecteurs x_i sont orthogonaux deux à deux i.e.

$$\forall (i, j) \in \mathrm{I}^2,\ i \neq j \implies (x_i \mid x_j) = 0$$

(ii) On dit que la famille est **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et si les x_i sont unitaires i.e.

$$\forall (i, j) \in \mathrm{I}^2,\ (x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$$

Exemple 2.1

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.1 Liberté des familles orthogonales

Toute famille orthogonale <u>ne comportant pas le vecteur nul</u> est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Proposition 2.2 Théorème de Pythagore

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel E. Alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Remarque. C'est une généralisation du théorème de Pythagore que vous connaissez en deux dimensions.

2.2 Bases orthonormales

Proposition 2.3 Coordonnées dans une base orthonormale

Soient $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien E et $x \in \mathrm{E}$. Alors $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} (x \mid e_i)e_i$.

Autrement dit les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sont $\big((x \mid e_i)\big)_{i\in\mathrm{I}}$, ou encore, $\forall i \in \mathrm{I}$, $e_i^*(x) = (x \mid e_i)$.

Proposition 2.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base **orthonormale** d'un espace préhilbertien E. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors

$$(x \mid y) = \sum_{i\in\mathrm{I}} e_i^*(x)e_i^*(y) = \sum_{i\in\mathrm{I}} (x \mid e_i)(y \mid e_i) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} e_i^*(x)^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} (x \mid e_i)^2$$

Interprétation matricielle du produit scalaire

Si on note X et Y les matrices colonnes de deux vecteurs x et y dans une base orthonormale, alors $(x \mid y) = \mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$.
En effet, $\mathrm{X}^\mathsf{T}\mathrm{Y}$ est une matrice carrée de taille 1 qu'on peut identifier à un réel.

Proposition 2.5

Tout espace **euclidien** admet une base orthonormale.

Le résultat précédent peut être démontré grâce au procédé suivant qui permet de **construire** explicitement une famille orthonormale à partir d'une famille libre.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. On cherche à construire une famille **orthonormale** $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n) = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_n)$$

On va raisonner par récurrence finie.
L'hypothèse de récurrence est la suivante :

HR(p) : «il existe une famille orthonormale $(f_1, \dots, f_p)$ telle que $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_p) = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_p)$.»

Initialisation L'initialisation est évidente, il suffit de normaliser e_1 i.e. de prendre $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Hérédité On suppose HR(p) pour $1 \leq p \leq n-1$. Le but est de construire f_{p+1}. On cherche d'abord un vecteur g orthogonal à $f_1, \dots, f_p$ sous la forme

$$g = e_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$$

On a alors nécessairement $\lambda_k = (f_k \mid e_{p+1})$ pour $1 \leq k \leq p$. Il suffit alors de normaliser g i.e. de prendre $f_{p+1} = \dfrac{g}{\|g\|}$. Par construction, f_{p+1} est unitaire et orthogonal à tous les f_i et $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \operatorname{vect}(f_1, \dots, f_{p+1})$.

Astuce de calcul : par le théorème de Pythagore, $\|g\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$.

Conclusion Par récurrence finie, HR(n) est vraie.

Exercice 2.1

Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ suivant :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Corollaire 2.1

Soit E un espace **euclidien**. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Remarque. Si l'on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, il est facile de trouver un produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormale. Il suffit de choisir $\left\{\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k^*(y) \end{array}\right.$.

3 Orthogonalité

3.1 Sous-espaces orthogonaux

Définition 3.1 Sous-espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. On dit que F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$ si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Proposition 3.1

Deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe.

Définition 3.2 Orthogonal d'une partie

Soient E un espace préhilbertien réel et A une partie E. On appelle **orthogonal** de A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A.

Exemple 3.1

$E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition 3.2

Soient E un espace préhilbertien réel et A une partie E. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel, F et $F^\perp$ sont orthognaux.

Attention ! Dire que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux ne signifie pas forcément que l'un est l'orthogonal de l'autre. Par exemple, deux droites de $\mathbb{R}^3$ peuvent être orthogonales sans que l'une soit l'orthogonal de l'autre puisque l'orthogonal d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ est un plan. En fait,

$$\mathrm{F} \perp \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \subset \mathrm{G}^\perp \iff \mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$$

Exercice 3.1

Soit A une partie d'un espace préhilbertien réel. Montrer que $\mathrm{A} \subset (\mathrm{A}^\perp)^\perp$.

Exercice 3.2

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien réel. Montrer que si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathrm{B}^\perp \subset \mathrm{A}^\perp$.
Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Proposition 3.3 Propriétés de l'orthogonal

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

(i) Si F admet un supplémentaire orthogonal G dans E, alors $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$. De plus, dans ce cas, $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.

(ii) Si F est de **dimension finie**, alors $\mathrm{F}^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F dans E. On a alors $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.

(iii) Si E est un espace euclidien, $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$.

Remarque. Si F est de **dimension finie** (et a fortiori quand E est lui-même de dimension finie), on a toujours $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.

Attention ! Si F n'est pas de dimension finie, $\mathrm{F}^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F : on peut seulement affirmer que F et $\mathrm{F}^\perp$ sont en somme directe.
On ne peut pas non plus affirmer que $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$ mais seulement que $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

Exemple 3.2

Munissons $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de son produit scalaire «usuel»

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathrm{X}^n\right) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

et considérons $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(1) = 0\}$. Soit $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathrm{F}^\perp$. Notamment, $\langle \mathrm{P}, \mathrm{X}^{n+1} - \mathrm{X}^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (a_n) est donc constante. Mais comme cette suite est presque nulle, elle est en fait constamment nulle. On en déduit que $\mathrm{P} = 0$ puis que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Par conséquent, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F} \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \subsetneq (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{E}$.

Exercice 3.3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \implies \mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \implies \mathrm{F} \subset \mathrm{G}$.
2. Montrer que $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.
3. Montrer que $\mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp$.

Exemple 3.3

Soit E un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit F un sous-espace vectoriel défini par le système d'équation $\begin{cases} -x + y - 3z + 2t = 0 \\ 3x + 4y - z + t = 0 \end{cases}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $F^\perp = \text{vect}(-e_1 + e_2 - 3e_3 + 2e_4, 3e_1 + 4e_2 - e_3 + e_4)$.

3.2 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition 3.3 Projecteur orthogonal

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **projecteur orthogonal** sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. La projection orthogonale sur F est notamment définie lorsque F est de dimension finie.

Proposition 3.4 Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. On se donne une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de F. Soient p le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Alors

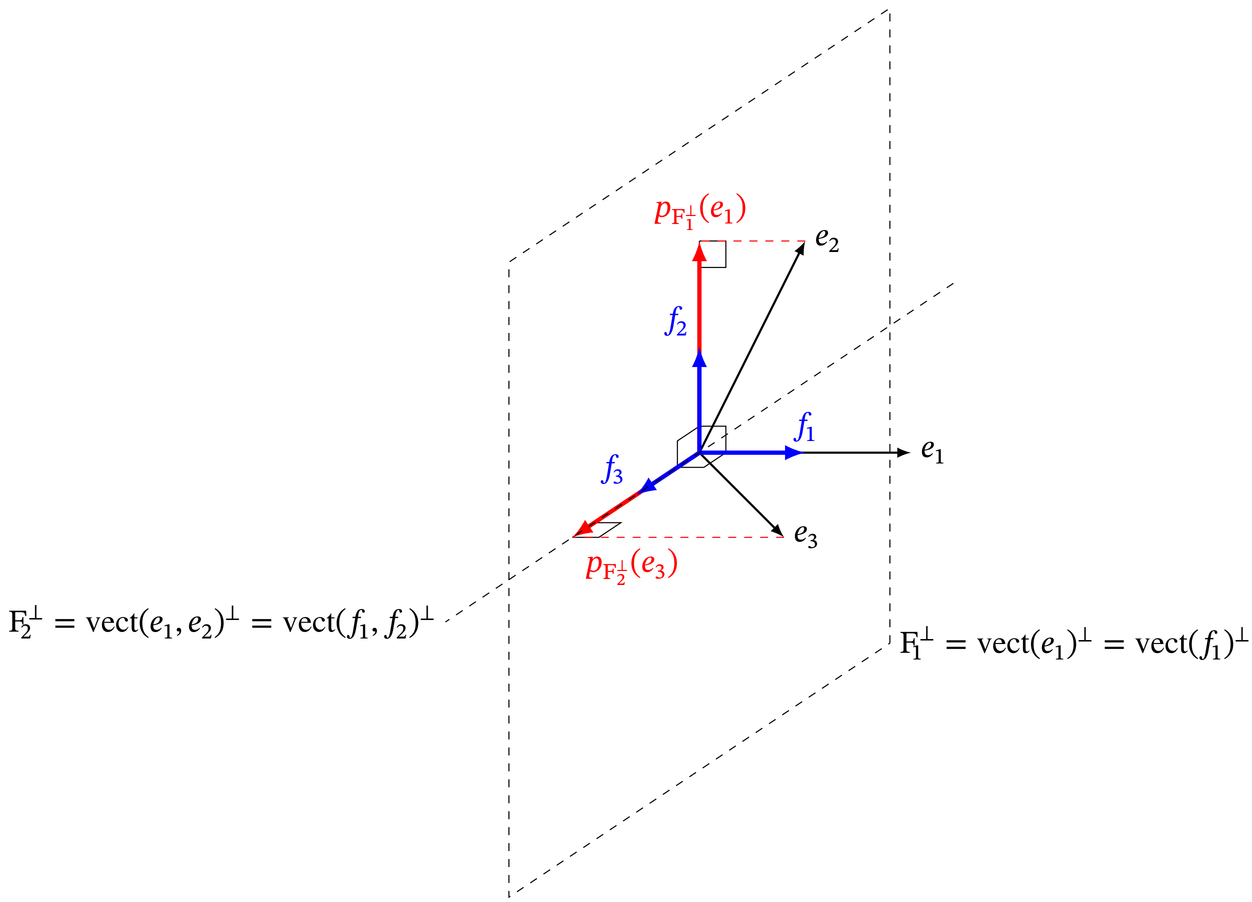
$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid f_k) f_k$$

Remarque. En particulier la projection d'un vecteur x sur une droite vectorielle $\text{vect}(u)$ est $\dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u$. Si u est normé, alors cette projection est simplement $(x \mid u)u$.

Remarque. On peut donner une interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. On sait qu'on peut construire une famille **orthonormale** $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}(f_1, \dots, f_k) = F_k$$

Alors, en convenant que $F_0 = \{0\}$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{k+1} = \dfrac{p_{F_k^\perp}(e_{k+1})}{\|p_{F_k^\perp}(e_{k+1})\|}$.



Exercice 3.4

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On se donne $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{F}$ une base orthonormale de F. On note enfin M la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice du projecteur orthogonals sur F dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{MM}^\top$.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 3.4 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. La distance de x à F est :

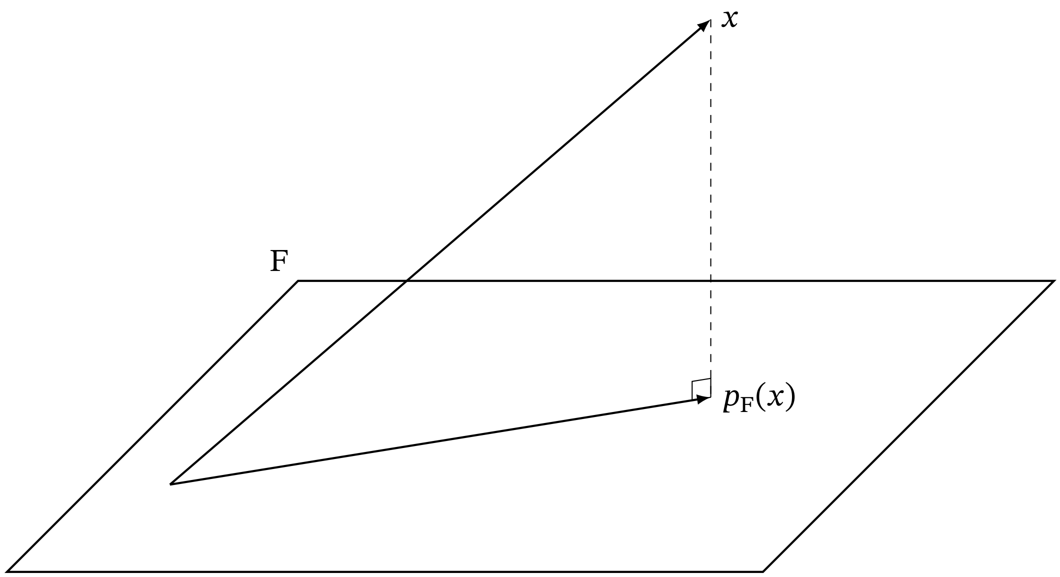
$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Proposition 3.5

Soient E un espace préhilbertien réel, $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. La distance de x à F est atteinte en $p_F(x)$, où p_F désigne la projection orthogonale sur F. Autrement dit,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y de F tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.



Remarque. D'après Pythagore, on a : $\|x-p_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{\mathrm{F}}(x)\|^2$. En particulier, si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormale de F,

$$\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x \mid f_k)^2$$

Cette remarque peut avoir un intérêt pour le calcul pratique de distance.

Remarque. Puisque $x - p_{\mathrm{F}}(x) = p_{\mathrm{F}^\perp}(x)$, on a également $d(x, \mathrm{F}) = \|p_{\mathrm{F}^\perp}(x)\|$.

3.4 Hyperplans

Proposition 3.6 Vecteur normal à un hyperplan

Soit E un espace préhilbertien réel.

(i) Pour tout vecteur non nul $n \in \mathrm{E}$, $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(n)^\perp$ est un hyperplan de E.

(ii) Pour tout hyperplan H de E, il existe un vecteur non nul $n \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(n)^\perp$.

Dans ce cas, on dit que n est un **vecteur normal** à l'hyperplan H.

Remarque. On peut toujours choisir un vecteur normal unitaire quitte à le diviser par sa norme.

Proposition 3.7 Projeté orthogonal sur un hyperplan

Soit $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(n)^\perp$ un hyperplan d'un espace euclidien E. Alors le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sur H est $x - \dfrac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n$.

Remarque. Si n est un vecteur unitaire, alors le projeté orthogonal de $x \in \mathrm{E}$ sur $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(n)^\perp$ est $x - \langle x, n\rangle n$.

Proposition 3.8 Distance à un hyperplan

Soit $\mathrm{H} = \mathrm{vect}(n)^\perp$ un hyperplan d'un espace euclidien E. Alors la distance de $x \in \mathrm{E}$ à H est $d(x, \mathrm{H}) = \dfrac{|\langle x, n\rangle|}{\|n\|}$.

Remarque. Si n est unitaire, $d(x, \mathrm{H}) = |\langle x, n\rangle|$.