Familles sommables

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Familles de réels positifs

Définition 1.1 Somme d'une famille de réels positifs

Soit $(u_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ une famille de réels **positifs**. Notons $\mathcal{P}_f(J)$ l'ensemble des parties finies de J. On pose

$$\sum_{j\in J} u_j = \sup\left\{\sum_{j\in K} u_j,\ K \in \mathcal{P}_f(J)\right\} \in [0, +\infty]$$

Remarque. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, la somme de la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Si la série diverge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 1.1 Invariance de la somme par permutation

Soient $(u_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ une famille de réels **positifs** et φ une permutation de J. Alors

$$\sum_{j\in J} u_{\varphi(j)} = \sum_{j\in J} u_j$$

Définition 1.2 Famille sommable de réels positifs

Soit $(u_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ une famille de réels **positifs**. On dit que $(u_j)_{j\in J}$ est **sommable** si $\sum_{j\in J} u_j < +\infty$.

Remarque. Soient $(a_j)_{j\in J}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de réels tels que $0 \le a_j \le b_j$ pour tout $j \in J$. Si $(b_j)_{j\in J}$ est sommable, alors $(a_j)_{j\in J}$ également.

Exemple 1.1

Soit $q \in [0, 1[$. La famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. En effet, si J est une partie finie de $\mathbb{Z}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset [\![-N, N]\!]$. Alors

$$\sum_{n\in J} q^{|n|} \le \sum_{n=-N}^{N} q^{|n|} = 1 + 2q\frac{1-q^N}{1-q} \le 1 + \frac{2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

La somme de la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $\dfrac{1+q}{1-q}$ puisque

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$$

Exemple 1.2

La famille $\left(\frac{1}{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable. En effet, posons $J_N = [\![1, N]\!]^2$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{(p,q)\in J_N} \frac{1}{pq} = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right)^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Proposition 1.2 Opérations

Somme Soient $(u_j)_{j\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ des familles de réels **positifs**. Alors $\sum_{j\in J} u_j + v_j = \sum_{j\in J} u_j + \sum_{j\in J} v_j$.

Multiplication par un réel positif Soient $(u_j)_{j\in J}$ une famille de réels **positifs** et λ un réel **positif**. Alors $\sum_{j\in J} \lambda u_j = \lambda \sum_{j\in J} u_j$.

Remarque. On utilise les conventions de calcul suivantes dans $[0, +\infty]$:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
- pour $\lambda > 0$, $\lambda \times (+\infty) = +\infty$;
- $0 \times (+\infty)$.

Proposition 1.3 Sommation par paquets

Soit $J = \bigsqcup_{i\in I} J_i$ et $(u_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ une famille de réels **positifs**. Alors

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} u_j = \sum_{j\in J} u_j$$

Remarque. L'égalité est encore valable lorsque l'un des membres vaut $+\infty$.

Exemple 1.3

On souhaite calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en admettant que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
En utilisant la partition $\mathbb{N}^* = \{2k,\ k \in \mathbb{N}^*\} \sqcup \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

Méthode

Pour montrer qu'une famille de réels **positifs** $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on peut employer le théorème de sommation par paquets ou le théorème de Fubini positif pour montrer que $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Exemple 1.4

On veut déterminer la nature de la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme il s'agit d'une famille de réels positifs, on peut employer le théorème de sommation par paquets en remarquant que $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{p\geq 2} I_p$ avec $I_p = \left\{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ m+n=p\right\}$. Ainsi

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{(m,n)\in I_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(I_p)}{p^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or $\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ donc

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 2$$

Proposition 1.4 Théorème de Fubini positif

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in (\mathbb{R}_+)^{I\times J}$ une famille de réels **positifs**. Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

Remarque. A nouveau, l'égalité est encore valable lorsque l'un des membres vaut $+\infty$.

Exercice 1.1

On souhaite calculer la somme de la famille $\left(\frac{1}{q^p}\right)_{p,q\geq 2}$.

$$\sum_{p,q\geq 2} \frac{1}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^2-q} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} = 1$$

2 Familles sommables de complexes

Définition 2.1 Famille sommable de réels

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ une famille de réels. On dit que la famille $(u_j)_{j\in J}$ est **sommable** si la famille $(|u_j|)_{j\in J}$ l'est.

Rappel **Parties positive et négative d'un réel**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \max(0,-x)$. Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 2.1

La famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ est sommable si et seulement si les familles $(u_j^+)_{j\in J}$ et $(u_j^-)_{j\in J}$ sont sommables.

Définition 2.2 Somme d'une famille de réels

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u_j^+ - \sum_{j\in J} u_j^-$$

Définition 2.3 Famille sommable de complexes

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille de complexes. On dit que la famille $(u_j)_{j\in J}$ est **sommable** si la famille $(|u_j|)_{j\in J}$ l'est.

Proposition 2.2

La famille $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in J}$ et $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in J}$ sont sommables.

Définition 2.4 Somme d'une famille de complexes

Soit $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ une famille sommable. On définit la somme de la famille $(u_j)_{j\in J}$ en posant

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$$

Exemple 2.1

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable de somme $\dfrac{1+q}{1-q}$.

Notation 2.1

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{K}^J$ est noté $\ell^1(J,\mathbb{K})$ ou plus simplement $\ell^1(J)$ s'il n'ya pas d'ambiguïté.

Remarque. Si $(u_j)_{j\in J} \in \ell^1(J)$, alors pour tout $K \in \mathcal{P}(J)$, $(u_k)_{k\in K} \in \ell^1(\mathbb{K})$.

Proposition 2.3 Invariance de la somme par permutation

Soient $(u_j)_{j\in J} \in \ell^1(J,\mathbb{K})$ et φ une permutation de J. Alors

$$\sum_{j\in J} u_{\varphi(j)} = \sum_{j\in J} u_j$$

Proposition 2.4

Soient $(u_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ et $(v_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ telles que $|u_j| \leq v_j$ pour tout $j \in J$. Si $(v_j)_{j\in J}$ est sommable, alors $(u_j)_{j\in J}$ l'est également.

Proposition 2.5 Linéarité de la somme

Soit $((u_j)_{j\in J}, (v_j)_{j\in J}) \in \ell^1(J, \mathbb{K})$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

- la famille $(\lambda u_j + \mu v_j)_{j\in J} \in \ell^1(J, \mathbb{K})$;
- $\displaystyle\sum_{j\in J} \lambda u_j + \mu v_j = \lambda \sum_{j\in I} v_j + \mu \sum_{j\in J} v_j$.

Proposition 2.6 Lien entre série et famille sommable

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque. Dans le cadre des séries, la notation $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ peut être ambiguë puisqu'elle peut donc désigner à la fois une série (i.e. la suite des sommes partielles) et la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.7 Sommation par paquets

Soient $J = \displaystyle\bigsqcup_{i\in I} J_i$ et $(u_j)_{j\in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$. Alors

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} u_j = \sum_{j\in J} u_j$$

Exemple 2.2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On souhaite montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Puisque $|z^{2^n}| < 1$, on obtient en faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathrm{J}_n = \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$. En partitionnant $\mathbb{N}^*$ suivant la valuation 2-adique, on montre que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$. Comme la série $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} z^j$ converge absolument, la famille $(z^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

Proposition 2.8 Théorème de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{I}\times\mathrm{J}, \mathbb{K})$. Alors les familles $(\sum_{j\in\mathrm{J}} u_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_{i,j})_{j\in\mathrm{J}}$ sont sommables et

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} u_{i,j} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} u_{i,j} \right) = \sum_{j\in\mathrm{J}} \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_{i,j} \right)$$

Exemple 2.3

On admet dans la suite que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument i.e. la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. On peut donc appliquer le théorème de sommation par paquets avec la partition $\mathbb{N}^* = \{2k,\ k \in \mathbb{N}^*\} \sqcup \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Mais en utilisant cette même partition,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Exemple 2.4

On veut calculer $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$.

Montrons d'abord la sommabilité de la famille $\displaystyle\left(\frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$. On applique le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m+n^2}-\frac{1}{m+n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

La famille $\displaystyle\left(\frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est donc sommable et on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m+n^2}-\frac{1}{m+n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Finalement, en utilisant l'exemple 2.3,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}=-\frac{\pi^2}{12}$$

Attention ! On ne peut pas toujours permuter l'ordre de sommation. Par exemple, en prenant

$$a_{p,q}=\frac{2p+1}{p+q+2}-\frac{p}{p+q+1}-\frac{p+1}{p+q+3}$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}=1\qquad\text{et}\qquad\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}=0$$

Ceci prouve en particulier que la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable sinon les deux sommes précédentes seraient égales en vertu du théorème de Fubini.

Proposition 2.9 Produit de deux familles sommables

Soient $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(v_j)_{j\in\mathrm{J}}$ deux familles sommables. Alors la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}=\left(\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i\right)\left(\sum_{j\in\mathrm{J}}v_j\right)$$

Remarque. Par récurrence, le résultat précédent s'étend à un produit d'un nombre fini de familles sommables.

3 Produit de Cauchy

Définition 3.1 Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n$ où $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries numériques **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ est une série absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Exemple 3.1

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes de sommes respectives e^a et e^b. On vérifie facilement que leur produit de Cauchy est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(a+b)^n}{n!}$. On en déduit que $e^{a+b} = e^a e^b$.