# Fonctions d'une variable réelle

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre seront des d'une variable réelle (i.e. l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Généralités

### 1.1 Ensemble de définition

On rappelle qu'une **fonction** (au contraire d'une **application**) dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ n'est pas forcément définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

**Définition 1.1 Ensemble de définition**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **ensemble de définition** de $f$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est défini.

**Exemple 1.1**

L'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 1.1**

Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$.

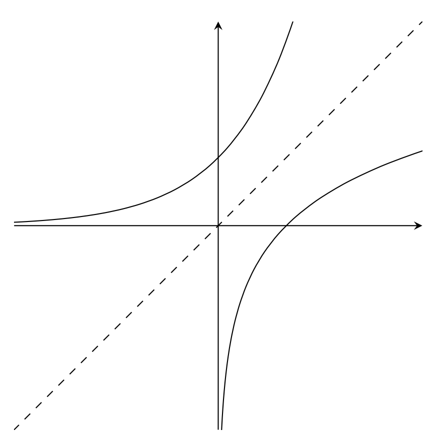
### 1.2 Représentation graphique

**Rappel Représentation graphique**

La représentation graphique d'une courbe dans un repère orthonormé est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où $x$ décrit l'ensemble de définition.

**Représentation graphique d'une bijection réciproque**

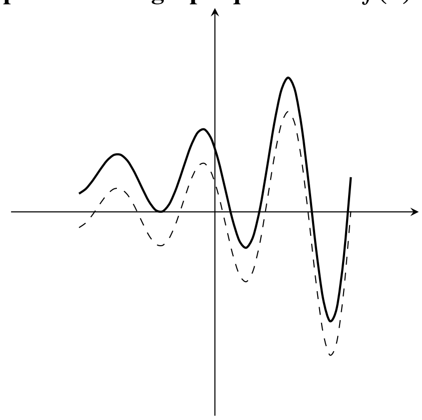
Soit $f$ une fonction bijective. Les représentations graphiques de $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
En effet, si on pose $y = f(x)$, les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f^{-1}(y))$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



**Fonctions associées**

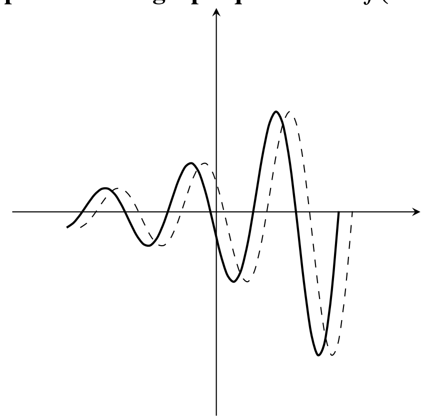
La fonction de référence est représentée en trait pointillé tandis que la fonction associée est représentée en trait continu.

**Représentation graphique de** $x \mapsto f(x) + a$



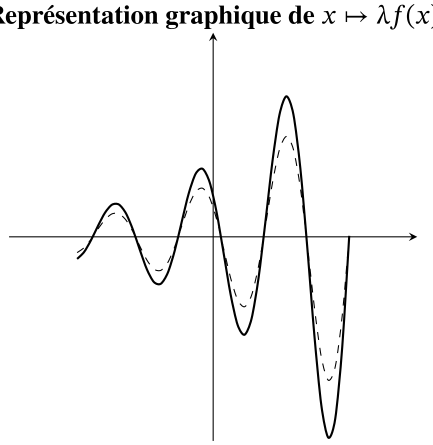
Translation de vecteur $a\vec{j}$

**Représentation graphique de** $x \mapsto f(x + a)$



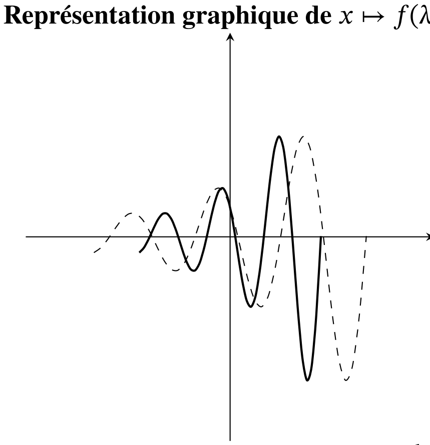
Translation de vecteur $-a\vec{\imath}$

**Représentation graphique de** $x \mapsto \lambda f(x)$



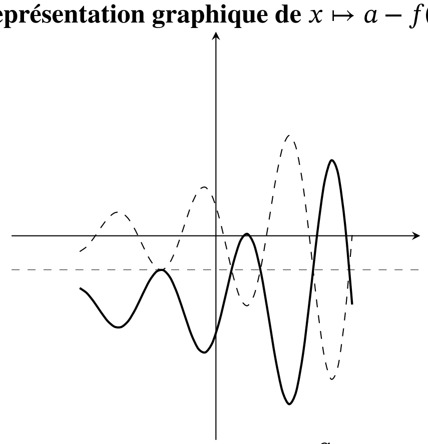
Dilatation verticale d'un facteur $\lambda$

**Représentation graphique de** $x \mapsto f(\lambda x)$



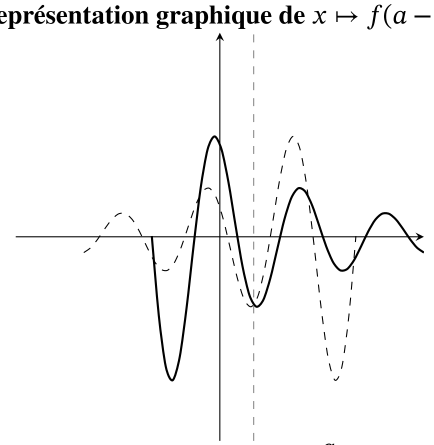
Dilatation horizontale d'un facteur $\dfrac{1}{\lambda}$

**Représentation graphique de** $x \mapsto a - f(x)$



Symétrie d'axe $y = \dfrac{a}{2}$

**Représentation graphique de** $x \mapsto f(a - x)$



Symétrie d'axe $x = \dfrac{a}{2}$

### 1.3 Parité et périodicité

**Définition 1.2 Parité**

Soit $f$ une fonction.
On dit que $f$ est **paire** si

- le domaine de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$ est symétrique par rapport à 0 :
  $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ -x \in \mathrm{D}_f$ ;
- $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.

On dit que $f$ est **impaire** si

- le domaine de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$ est symétrique par rapport à 0 :
  $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ -x \in \mathrm{D}_f$ ;
- $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$.

**Remarque.** Si $f$ est une fonction impaire définie en 0, alors $f(0) = 0$.

**Attention !** Une fonction peut n'être ni paire ni impaire !

**Remarque.** Il n'y a évidemment pas besoin de vérifier la condition sur le domaine de définition s'il est égal à $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.2**

La fonction cos est paire. Les fonctions sin et tan sont impaires.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ a la parité de $n$.

**Interprétation graphique**

- La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

**Définition 1.3 Périodicité**

Soit $f$ une fonction et T un réel strictement positif. On dit que $f$ est T-périodique si

- le domaine de définition $\mathrm{D}_f$ de $f$ est «T-périodique» : $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ x + \mathrm{T} \in \mathrm{D}_f$ ;
- $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

**Remarque.** Il n'y a évidemment pas besoin de vérifier la condition sur le domaine de définition s'il est égal à $\mathbb{R}$.

**Remarque.** Si $f$ est T-périodique, $f(x + n\mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, $f$ est également $n$T-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exemple 1.3**

Les fonctions cos et sin sont $2\pi$-périodiques. La fonction tan est $\pi$-périodique.

**Interprétation graphique**

La représentation d'une fonction T-périodique dans une repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

**Remarque.** On a également invariance par translation de vecteur $nT\vec{\imath}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

## 1.4 Opérations sur les fonctions

**Définition 1.4 Somme et produit**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions. On définit alors $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)g(x)$.

**Rappel Composée**

On appelle composée des fonctions $f$ et $g$ la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

**Exemple 1.4**

La fonction $x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$ est la composée de la fonction $x \mapsto x^2+1$ suivie de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ puis de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

## 1.5 Monotonie

**Définition 1.5 Monotonie**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que $f$ est **croissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

On dit que $f$ est **décroissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

On dit que $f$ est **strictement croissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$$

On dit que $f$ est **strictement décroissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$$

On dit que $f$ est **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.
On dit que $f$ est **strictement monotone** sur I si elle y est strictement croissante ou décroissante.

**Attention !** Une fonction peut n'être ni croissante ni décroissante !

**Remarque.** Du point de vue du vocabulaire, on dit que «$f$ est monotone **sur** un intervalle I».
On ne dira **JAMAIS** «$f(x)$ est monotone pour tout $x \in \mathrm{I}$». Cela signifierait qu'un réel est monotone.

**Remarque.** Une fonction constante est croissante et décroissante au sens large. La réciproque est d'ailleurs vraie : si une fonction est croissante et décroissante, alors elle est constante.

**REMARQUE.** Si $f$ est croissante sur I, alors

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ f(x) < f(y) \implies x < y$$

Si $f$ est décroissante sur I, alors

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ f(x) < f(y) \implies x > y$$

Si $f$ est strictement croissante sur I, alors

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$$

Si $f$ est strictement décroissante sur I, alors

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ f(x) \leq f(y) \implies x \geq y$$

Les deux derniers points ne sont plus valables lorsque $f$ est croissante ou décroissante au sens large. Par exemple, si $f$ est une fonction constante sur I, on a $f(x) \leq f(y)$ et $f(x) \geq f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ mais on ne peut jamais en déduire que $x \leq y$ ou $x \geq y$.

**Proposition 1.1 Stricte monotonie et injectivité**

Une fonction strictement monotone est injective.

**REMARQUE.** La réciproque est vraie à condition de considérer une fonction **continue** sur un **intervalle**.

**Proposition 1.2 Somme de fonctions monotones**

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.
- La somme de d'une fonction croissante et d'une fonction strictement croissante est strictement croissante.
- La somme de d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante est strictement décroissante.

**REMARQUE.** A fortiori, la somme de deux fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

**Exemple 1.5**

La fonction $x \mapsto x + x^3 + x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.3 Composition de fonctions monotones**

- La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions monotones de sens de variation opposés est décroissante.
- La composée de deux fonctions strictement monotones de même sens de variation est strictement croissante.
- La composée de deux fonctions strictement monotones de sens de variation opposés est strictement décroissante.

**Exemple 1.6**

La fonction $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

**ATTENTION !** Un produit de fonctions monotones n'est pas forcément monotone. Par exemple, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ mais leur produit $x \mapsto x^4$ n'est ni croissant ni décroissant sur $\mathbb{R}$.
Néanmoins, si $f$ et $g$ sont des fonctions croissantes (resp. décroissantes) et **positives**, alors leur produit est croissant (resp. décroissant).
De même, si $f$ et $g$ sont des fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) et **strictement positives**, alors leur produit est strictement croissant (resp. strictement décroissant).

### 1.6 Fonctions majorées, minorées, bornées

**Définition 1.6**

Soit $f$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est **majorée** sur A si $f(A)$ est majoré i.e. si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M$$

On dit que $f$ est **minorée** sur A si $f(A)$ est minoré i.e. si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \geq m$$

On dit que $f$ est **bornée** sur A si $f$ est majorée et minorée sur A ou encore si $f(A)$ est bornée i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$$

**REMARQUE.** On dit alors que M est un **majorant** de $f$ sur A et que $m$ est un **minorant** de $f$ sur A.

**REMARQUE.** Si on ne précise pas la partie A sur laquelle la fonction est majorée/minorée/bornée, c'est que l'on fait implicitement référence à tout l'ensemble de définition.

**Exemple 1.7**

La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée sur $\mathbb{R}$ mais elle n'y est pas majorée.
Les fonctions sin et cos sont bornées sur $\mathbb{R}$.

**Interprétation graphique**

- Une fonction est majorée si sa représentation graphique est située au-dessous d'une droite horizontale.
- Une fonction est minorée si sa représentation graphique est située au-dessus d'une droite horizontale.
- Une fonction est bornée si sa représentation graphique est située entre deux droites horizontales.

**Proposition 1.4**

Soit $f$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.
Alors $f$ est bornée sur A si et seulement si $|f|$ est majorée sur A.

**Exemple 1.8**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$. On souhaite monter que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \dfrac{|\sin x|}{|2 - \cos x|}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$ et $|2 - \cos x| \geq 2 - |\cos x| \geq 1$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1$ et $f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.5**

- Une somme de fonctions majorées est majorée.
- Une somme de fonctions minorées est minorée.
- Une somme et un produit de fonctions bornées sont bornés.

**Définition 1.7 Maximum, minimum**

Soit $f$ une fonction définie sur A.

- On dit que $f$ admet un maximum sur A s'il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Le réel $\mathrm{M} = f(a)$ est alors appelé le maximum de $f$ sur A et on note $\mathrm{M} = \max_{\mathrm{A}} f$. On a en fait $\mathrm{M} = \max f(\mathrm{A})$.
- On dit que $f$ admet un minimum sur A s'il existe $b \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) \geq f(b)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Le réel $m = f(b)$ est alors appelé le minimum de $f$ sur A et on note $m = \min_{\mathrm{A}} f$. On a en fait $m = \min f(\mathrm{A})$.

**Remarque.** Un maximum ou un minimum est nécessairement une valeur **atteinte** par la fonction.

**Remarque.** Une fonction admettant un maximum (resp. un minimum) est nécessairement majorée (resp. minorée).

**Exemple 1.9**

La fonction sin admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$ valant respectivement $-1$ et 1 car $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

**Exemple 1.10**

La fonction exponentielle n'admet clairement pas de maximum car elle n'est pas majorée. Elle n'admet pas non plus de minimum. Soit en effet $b \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x < b$, $e^x < e^b$ donc l'exponentielle ne peut admettre de minimum en $b$. Ceci étant vrai quelque soit $b \in \mathbb{R}$, l'exponentielle n'admet pas de minimum.

**Attention !** Une fonction majorée (resp. minorée) n'admet pas forcément de maximum (resp. de minimum) comme le montre l'exemple de la fonction exponentielle.

## 2 Continuité

**Définition 2.1 Continuité**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que $f$ est continue en $a \in \mathrm{I}$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que $f$ est continue sur I si $f$ est continue en tout $a \in \mathrm{I}$.

**Théorème 2.1 Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction continue sur intervalle $[a, b]$. Pour tout réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.
Si de plus, $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, ce réel $x$ est unique.

**Corollaire 2.1 Théorème de la bijection monotone**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On suppose que

- $f$ est **continue** sur I ;
- $f$ est **strictement monotone** sur I.

Alors

- $f$ réalise une **bijection** de I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ ;
- l'application réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ est une bijection **continue** et **strictement monotone** sur J de même sens de variation que $f$.

De plus, si $\mathrm{I} = [a, b]$, on a

- si $f$ est croissante, $f(\mathrm{I}) = [f(a), f(b)]$ ;
- si $f$ est décroissante, $f(\mathrm{I}) = [f(b), f(a)]$.

On a des résultats analogues si I est un intervalle ouvert ou semi ouvert ($a$ et $b$ pouvant être égaux respectivement à $-\infty$ et $+\infty$) avec éventuellement des limites. Par exemple, si $f$ est une application continue et strictement croissante sur $\mathrm{I} = ]a, b]$, $f$ réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I}) = ]\lim_{a^+} f, f(b)]$.

**Méthode** **Nombre de solutions d'une équation**

On peut toujours mettre une équation d'inconnue réelle sous la forme $f(x) = 0$. L'étude des variations de $f$ et le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire le nombre de solutions de cette équation.

**Exemple 2.1**

On désire déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$. On pose $f(x) = x^5 - 5x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$. On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $-1$ | $\beta$ | $1$ | $\gamma$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $5$ | $0$ | $-3$ | $0$ | $+\infty$ |

On déduit du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ respectivement dans les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
On utilise en fait trois fois le théorème des valeurs intermédiaires :

- $f$ est continue et strictement monotone sur $]-\infty, -1]$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $f(-1) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]-\infty, -1[$.
- $f$ est continue et strictement monotone sur $[-1, 1]$, $f(-1) > 0$ et $f(1) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in ]-1, 1[$.
- $f$ est continue et strictement monotone sur $[1, +\infty[$, $f(1) < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\gamma \in ]1, +\infty[$.

On peut également déduire du tableau de variations que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $]-\infty, \alpha] \cup [\beta, \gamma]$.
De même, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $]\alpha, \beta[ \cup ]\gamma, +\infty[$.

# 3 Dérivation

## 3.1 Taux de variation et dérivée

**Définition 3.1 Taux de variation**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. On appelle **taux de variation** de $f$ en $a$ la fonction $\tau_a f$ : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}\right.$.

**Définition 3.2 Dérivabilité et nombre dérivé**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. On dit que $f$ est **dérivable** en $a$ si son taux de variation en $a$ admet une limite finie en $a$. Dans ce cas, on note cette limite $f'(a)$ et on l'appelle **nombre dérivé** de $f$ en $a$ ou, plus simplement, **dérivée** de $f$ en $a$.

**Exemple 3.1**

On en déduit les limites usuelles suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

**Définition 3.3 Dérivabilité sur un intervalle**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $f$ est **dérivable sur l'intervalle** I si $f$ est dérivable en tout point de I.
L'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de $f$ ou, plus simplement, **dérivée** de $f$.

**Remarque.** On ne dira **JAMAIS** que $f(x)$ est dérivable pour tout $x \in \mathrm{A}$. Cela signifierait qu'un réel est dérivable.

**Proposition 3.1 Dérivabilité et continuité**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.

- **Si** $f$ est dérivable en $a$, **alors** $f$ est continue en $a$.
- **Si** $f$ est dérivable sur I, **alors** $f$ est continue sur I.

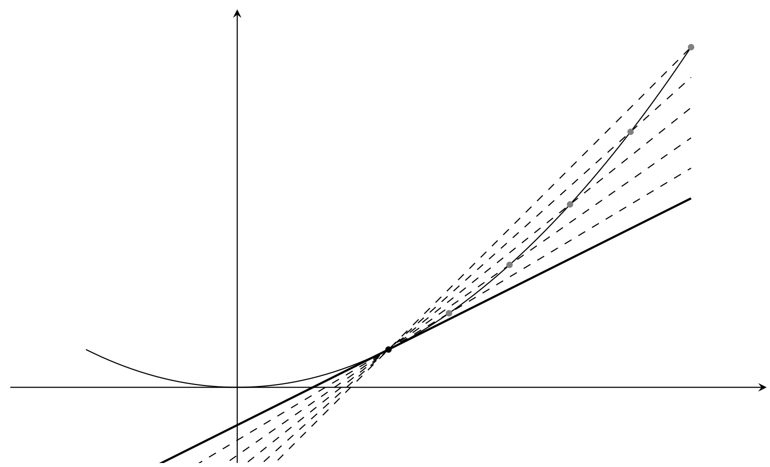
**Définition 3.4 Tangente**

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$. La droite passant par le point de la courbe représentative de $f$ d'abscisse $a$ et de coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la **tangente** à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.
Elle admet pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

**Remarque.** En particulier, si $f'(a) = 0$, la courbe représentative de $f$ admet une tangente **horizontale** au point d'abscisse $a$.

**Interprétation géométrique**

$\tau_a f(x)$ est la pente de la sécante passant par les ponts d'abscisse $a$ et $x$. Quand $x$ tend vers $a$, la sécante tend vers la tangente au point d'abscisse $a$. $f'(a)$ est donc la pente de la tangente.



## 3.2 Dérivation et opérations

**Proposition 3.2 Opérations arithmétiques**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur A.

**Combinaison linéaire** Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur A et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

**Produit** $fg$ est dérivable sur A et $(fg)' = f'g + fg'$.

**Quotient** Si $g$ **ne s'annule pas** sur A, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur A et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Proposition 3.3 Composition**

On suppose que

- $f$ est dérivable sur I ;
- $g$ est dérivable sur J ;
- $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

**Exemple 3.2**

Considérons la fonction $f: x \mapsto \ln(1+\sqrt{x^2-1})$. On remarque que $f$ est la composée de $g: x \mapsto x^2-1$ suivie de $h: x \mapsto 1+\sqrt{x}$ puis de $i: x \mapsto \ln x$.
Justifions d'abord la dérivabilité :

- $g: x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ;
- $h: x \mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ ;
- $i: x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Par conséquent, $f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. On démontre de la même manière que $f$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$ (ou on invoque la parité de $f$).
Procédons maintenant au calcul de la dérivée : pour tout $x \in ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (i\circ h\circ g)'(x) = i'(h(g(x)))(h\circ g)'(x) = i'(h(g(x)))h'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \times (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}+x^2-1} \end{aligned}$$

**Exercice 3.1**

Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire).

**Attention !** Il faut **TOUJOURS** justifier la dérivabilité d'une fonctio **AVANT** de calculer sa dérivée.
Il ne faut d'ailleurs surtout pas se fier à l'expression de la dérivée pour en déduire a posteriori l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable.
Par exemple, ln est dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais pourtant ln n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (elle n'y est même pas définie).

**Théorème 3.1 Dérivabilité de la bijection réciproque**

Soit $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$. On suppose que

- $f$ est **bijective** ;
- $f$ est **dérivable** sur I ;
- $f'$ **ne s'annule pas** sur I.

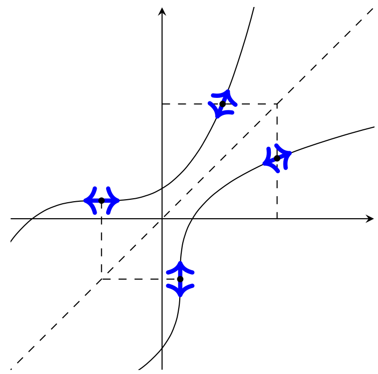
Alors

- $f^{-1}$ est **dérivable** sur J ;
- $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

**Remarque.** On retrouve facilement l'expression de $(f^{-1})'$ en dérivant l'identité $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ (on dérive le membre de gauche comme une composée).

**Interprétation géométrique**

La pente de la tangente au point $(a, f(a))$ de la courbe représentative de $f$ est l'inverse de la pente de la tangente au point $(f(a), a)$ de la courbe représentative de $f^{-1}$.
Si la première pente est nulle, la seconde est infinie : autrement dit, $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $f(a)$.



## 3.3 Dérivation et monotonie

**Proposition 3.4 Caractérisation de la constance et de la monotonie**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- $f$ est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
- $f$ est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I.
- $f$ est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.

**Attention !** Il est essentiel que I soit un **intervalle**. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. $f$ est dérivable ssur $\mathbb{R}^*$ de dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, $f$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, $-1 \leq 1$ mais $f(-1) \leq f(1)$. Le problème est que $\mathbb{R}^*$, n'est pas un intervalle.
Néanmoins, $f$ est décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^*+$ et $\mathbb{R}_-^*$ pris séparément.

**Proposition 3.5 Stricte monotonie**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si $f' > 0$ sur I, alors $f$ est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors $f$ est strictement décroissante sur I.

**Attention !** Les réciproques sont fausses. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'y est pas strictement positive puisqu'elle s'annule en 0.

La proposition suivante est plus précise que la précédente.

**Proposition 3.6 Stricte monotonie**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- $f$ est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et $f'$ n'est jamais nulle sur un intervalle non réduit à un point.
- $f$ est strictement décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I et $f'$ n'est jamais nulle sur un intervalle non réduit à un point.

### 3.4 Tableau de variations

Établir un tableau de variations consiste à placer dans un tableau le signe de la dérivée ainsi que les variations de la fonction qui en découlent. On place également les limites éventuelles de la fonction dans ce tableau.

**Méthode** **Déterminer le signe d'une dérivée**

On essaiera toujours de **FACTORISER** l'expression de la dérivée afin de pouvoir déterminer aisément son signe. Il est en effet beacoup plus simple de déterminer le signe d'un produit que d'une somme.

**Remarque.** On n'est pas toujours obligé de déterminer la dérivée afin de déterminer le sens de variation. Par exemple $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est clairement croissante en tant que composée de deux fonctions croissantes.

**Exemple 3.3**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

**Méthode** **Établir des majorations et des minorations**

Un tableau de variations permet de majorer ou minorer facilement des fonctions ou d'en déterminer un maximum ou un minimum.

**Exemple 3.4**

L'étude précédente de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ montre que cette fonction admet pour maximum $\dfrac{1}{e}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que celui-ci est atteint en $e$.

**Méthode** **Établir des inégalités par étude de fonction**

Pour établir une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$, on peut étudier la fonction $f-g$ ou $g-f$.

**Exemple 3.5**

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leq x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\sin x \geq x$.
Introduisons la fonction $f : x \mapsto \sin x - x$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. Ainsi $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $f(0) = 0$, $f(x) \leq 0$ i.e. $\sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $f(x) \geq 0$ i.e. $\sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$.
Ceci se visualise mieux à l'aide du tableau de variations.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | $0$ | | $-\infty$ |

**Exercice 3.2**

Montrer que pour tout $x \in ]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

**Exemple 3.6**

On peut être amené à dériver plus d'une fois. Montrons par exemple que $e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ et que $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \in_d \mathrm{R}_+$.
Posons $f : x \mapsto e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $f'$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit que $f'' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et que $f'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $f'$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque $f'(0) = 0$, $f'$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque $f(0) = 0$, $f \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a bien les inégalités voulues.
La situation est résumée par le tableau de variations suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |

## 3.5 Dérivées successives

**Définition 3.5 Dérivées successives**

Soient $f$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$. Si $f$ est $n$ fois dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{\text{ème}}$.
En particulier, $f^{(0)} = f$.

**Remarque.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$.

**Exercice 3.3**

Soient $f$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $f$ est une fonction paire, alors $f^{(n)}$ a la parité de $n$ et que si $f$ est une fonction impaire, $f^{(n)}$ a une parité opposée à celle de $n$.

**Exercice 3.4**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les dérivées successives de $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$.

**Définition 3.6 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$**

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si $f$ est indéfiniment dérivable sur I.
On note $\mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(\mathrm{I})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

**Remarque.** $\mathcal{C}^0(\mathrm{I})$ est l'ensemble des fonctions **continues** sur I.

**Remarque.** Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les dérivées successives de $f$ sont toutes continues puisque dérivables.

**Attention !** Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$ est dérivable en 0 mais sa dérivée $x \mapsto 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

**Remarque.**

- Si $n \leq p$, alors $\mathcal{C}^p(\mathrm{I}) \subset \mathcal{C}^n(\mathrm{I})$.
- $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\mathrm{I})$.
- $\mathcal{C}^0(\mathrm{I}) \supset \mathcal{C}^1(\mathrm{I}) \supset \mathcal{C}^2(\mathrm{I}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^n(\mathrm{I}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I})$.

**Proposition 3.7 Opérations arithmétiques**

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I.

**Combinaison linéaire** Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).

**Produit** $fg$ est de classe $\mathcal{C}^{(n)}$ sur I.

**Quotient** Si $g$ **ne s'annule pas** sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

**Remarque.** On verra ultérieurement la formule donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit.

# 4 Étude de fonctions

## Ensemble de définition

On recherche tout simplement la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle $f$ est définie.

## Restriction du domaine d'étude

On essaie de tirer parti de certaines propriétés de la fonction $f$ afin de restreindre le domaine d'étude.

**Méthode** **Restriction du domaine d'étude**

- Si $f$ est **paire** ou **impaire**, on n'étudie $f$ que sur $\mathbb{R}_+$. Le comportement de $f$ sur $\mathbb{R}_-$ est obtenu par symétrie.
- Si $f$ est **périodique** de période T, on n'étudie $f$ que sur un intervalle de longueur T, habituellement $[0, \mathrm{T}]$ ou $\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$. C'est souvent le cas si $f$ fait intervenir des fonctions **trigonométriques**. On obtient le comportement de $f$ sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
- Si $f$ est **paire** ou **impaire** <u>**et**</u> périodique de période T, on étudie $f$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$. Par parité, on obtient le comportement de $f$ sur $\left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$. Comme cet intervalle est de longueur T, on en déduit le comportement de $f$ sur $\mathbb{R}$ par symétrie.

## Variations

De manière générale, on calcule la dérivée de $f$ et on utilise le signe de $f'$ pour en déduire le sens de variation de $f$. On rappelle qu'on peut également déterminer directement le sens de variation en identifiant $f$ comme somme de fonctions de même sens de variation ou comme composée de fonctions monotones.

## Limites aux bornes de l'ensemble de définition

On détermine les limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition. On verra plus loin comment lever les éventuelles formes indéterminées.

**Limite d'un polynôme à l'infini**

La limite d'un polynôme à l'infini est égale à la limite de son terme **non nul** de plus haut degré.

$$\text{Si } a_n \neq 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

**Limite à l'infini d'une faction rationnelle**

On appelle fraction rationnelle tout quotient de polynômes.
Soient P et Q deux polynômes. On a trois possibilités de limites à l'infini suivant les degrés de P et Q.

- Si $\deg \mathrm{P} < \deg \mathrm{Q}$, alors $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = 0$.
- Si $\deg \mathrm{P} > \deg \mathrm{Q}$, alors $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \pm\infty$. Le signe de la limite dépend des signes des coefficients dominants de P et Q.
- Si $\deg \mathrm{P} = \deg \mathrm{Q}$, alors $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont les coefficients dominants respectifs de P et Q.

**Attention !** La proposition précédente n'est valable que pour des limites **A L'INFINI !**

**Méthode** **Limite à l'infini d'une fraction rationnelle**

On peut également retenir la proposition précédente de la manière suivante : pour déterminer la limite à l'infini d'une fraction rationnelle, il suffit de remplacer le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

**Exemple 4.1 Limite à l'infini de fractions rationnelles**

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + x^2 - 5x + 1}{4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3}{4x^4} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{-3x^3 + x^2 + 6x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4}{-3x^3} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{4x}{3} = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 1}{3x^3 - 2x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \frac{2}{3}$

## Tableau de variations

On regroupe les informations sur le sens de variation dans un tableau de variations.

**Attention !** On n'oublie pas de vérifier que les limites sont cohérentes avec les variations. Il est par exemple impossible d'avoir une fonction $f$ croissante sur $]a, b[$ avec $\lim_{a+} f = +\infty$ ou $\lim_{b-} f = -\infty$.

## Branches infinies

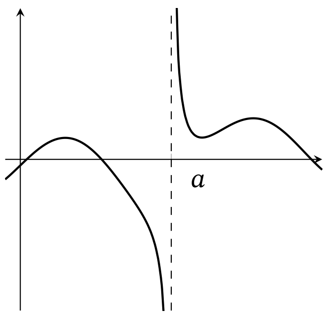
L'étude des branches infinies consiste à préciser l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ quand $x$ ou $f(x)$ tend vers l'infini. On a plusieurs cas possibles.

- **Limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$**
  $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.
- **Limite finie $l$ à l'infini**
  $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = l$ comme **asymptote horizontale**.
- **Limite infinie à l'infini**
  Dans ce cas, on calcule la limite $l$ de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers l'infini. On a à nouveau plusieurs cas possibles.

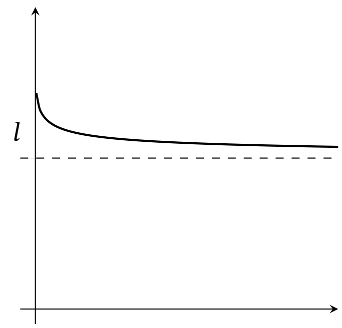
1. Si $l = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction** $(\mathrm{O}x)$.
2. Si $l = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction** $(\mathrm{O}y)$.
3. Si $l \in \mathbb{R}^*$, alors on calcule la limite $c$ de $f(x) - lx$ quand $x$ tend vers l'infini. On a deux cas possibles.
   (a) Si $c = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = lx$.
   (b) Si $c \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}_f$ admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation $y = lx + c$.

**Le programme stipule que vous n'avez à connaître que les asymptotes horizontales et verticales.**

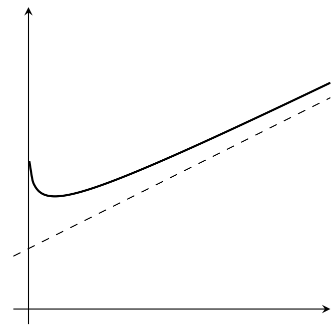
**Les 6 types de branches infinies**



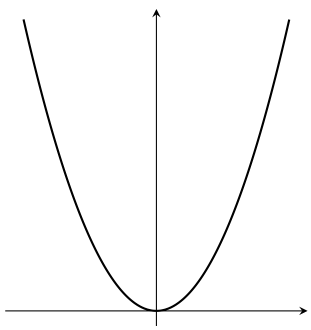

Asymptote verticale d'équation $x = a$



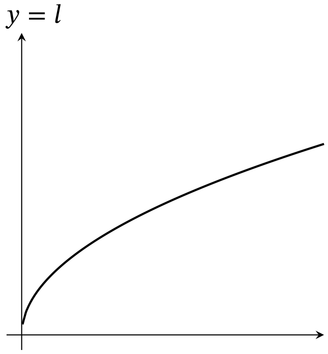

Asymptote horizontale d'équation $y = l$



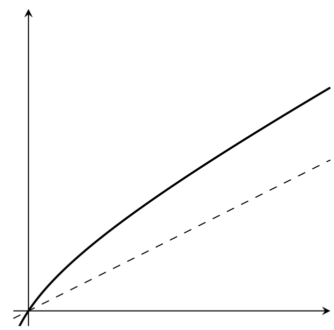
Asymptote oblique d'équation $y = ax + b$



Branche parabolique
de direction $(\mathrm{O}y)$



Branche parabolique
de direction $(\mathrm{O}x)$



Branche parabolique
de direction $y = ax$

## Tracé de la courbe

On place les asymptotes et les tangentes horizontales puis on trace le graphe. On complète éventuellement le graphe par les symétries repérées lors de la réduction

**Exemple 4.2 Etude de la fonction $f : x \mapsto \sin 2x + 2\sin x$**

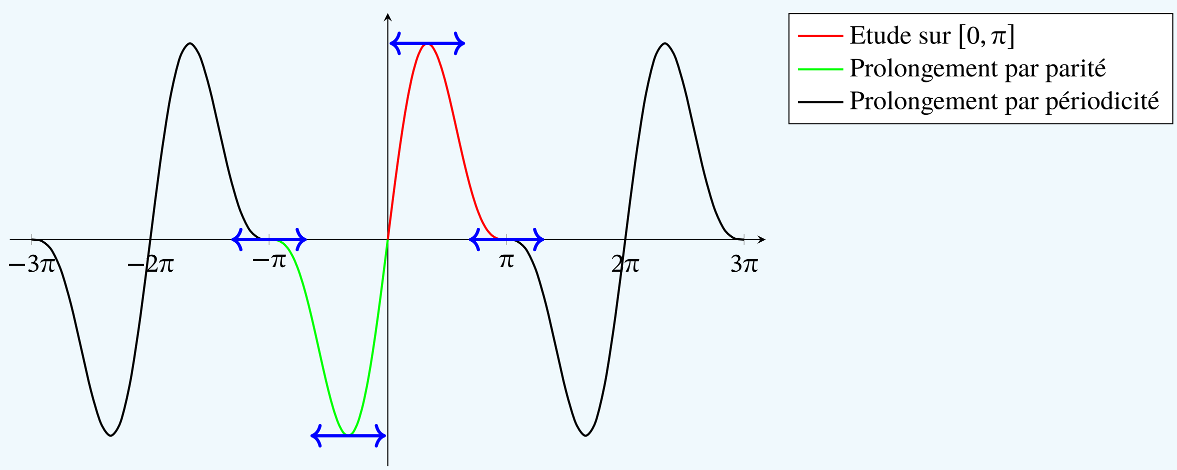
L'ensemble de définition de $f$ est clairement $\mathbb{R}$.
$f$ est $2\pi$-périodique et impaire. On peut donc l'étudier sur $[0, \pi]$.
$f$ est clairement dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 4\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

On remarque qu'on a en particulier des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et $\pi$.
On en déduit le tracé suivant.




On peut par exemple déduire de l'étude que $f$ admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}$ valant respectivement $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**Exemple 4.3 Étude de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-4}$**

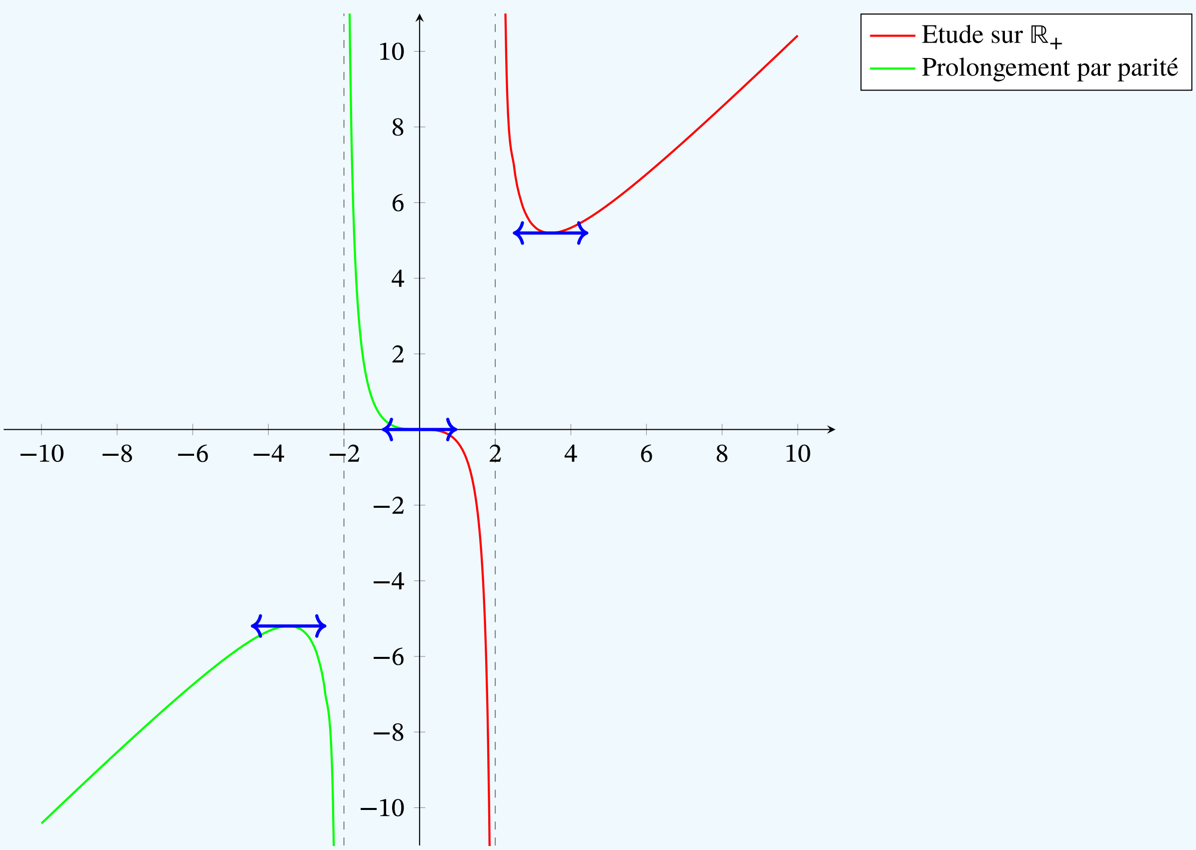
L'ensemble de définition de $f$ est clairement $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
$f$ est impaire (on vérifie en particulier que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0). On peut se contenter d'étudier $f$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$.
$f$ est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathrm{D}_f$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Comme on a une expression factorisée de $f'$, on obtient facilement le tableau de variations.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3\sqrt{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

On voit par exemple que la courbe représentative de $f$ admet une asympote verticale d'équation $x = 2$ (et donc également une asymptote d'équation $x = -2$ par parité).
On peut également constater que $f$ admet un minimum sur $]2, +\infty[$ et que celui-ci vaut $3\sqrt{3}$.



## 5 Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, on traite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

**Définition 5.1 Parties réelle et imaginaire**

Soit $f$ une fonction à valeurs complexes.

- On appelle **partie réelle** de $f$ la fonctions $\text{Re}(f) : x \mapsto \text{Re}(f(x))$.
- On appelle **partie imaginaire** de $f$ la fonction $\text{Im}(f) : x \mapsto \text{Im}(f(x))$.

On a donc $f = \text{Re}(f) + i\,\text{Im}(f)$.

**Définition 5.2 Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes**

Soit $f$ une fonction à valeurs complexes. On dit que $f$ est dérivable si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont. On pose alors $f' = \text{Re}(f)' + i\,\text{Im}(f)'$.

**Exemple 5.1**

$x \mapsto e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto ie^{ix}$.

**Proposition 5.1 Opérations arithmétiques**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs complexes dérivables sur A.

**Combinaison linéaire** Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur A et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

**Produit** $fg$ est dérivable sur A et $(fg)' = f'g + fg'$.

**Quotient** Si $g$ **ne s'annule pas** sur A, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur A et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Remarque.** Ce sont exactement les mêmes propriétés que pour les fonctions à valeurs réelles.

**Proposition 5.2**

Soit $\varphi$ une fonction à valeurs complexes dérivable sur A. Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur A et $(\exp \circ \varphi)' = (\exp \circ \varphi)\varphi'$.

**Remarque.** On a bien entendu des résultats plus généraux pour les composées de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ mais ceux-ci seront traités plus loin.

**Exemple 5.2**

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.