MATRICES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p et n des entiers naturels non nuls.

1 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Définition

Définition 1.1 Matrice

On appelle **matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes** ou **matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$** toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée sur $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ i.e. toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ du type $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

Notation 1.1

Une matrice de taille $n \times p$ est généralement représentée sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes (d'où l'appellation...) :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'élément $a_{i,j}$ est donc placé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Définition 1.2 Ensembles de matrices

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$.
Lorsque $n = p$, cet ensemble est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On parle alors de **matrices carrées** de taille n.
Lorsque $p = 1$, on parle de **matrices colonnes** de taille n.
Lorsque $n = 1$, on parle de **matrices lignes** de taille p.

REMARQUE. Les appellations «matrices carrées», «matrices colonnes» et «matrices lignes» proviennent bien évidemment de la forme des tableaux représentant ces matrices dans les cas $n = p$, $p = 1$ et $n = 1$.

1.2 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est autre que $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou encore $\mathbb{K}^{np}$. On définit donc la loi interne $+$ et la loi interne . usuelles de sorte qu'on a le résultat suivant.

Proposition 1.1 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

REMARQUE. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice nulle** i.e. le tableau à n lignes et p colonnes rempli de zéros.

Définition 1.3 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
La famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc np.

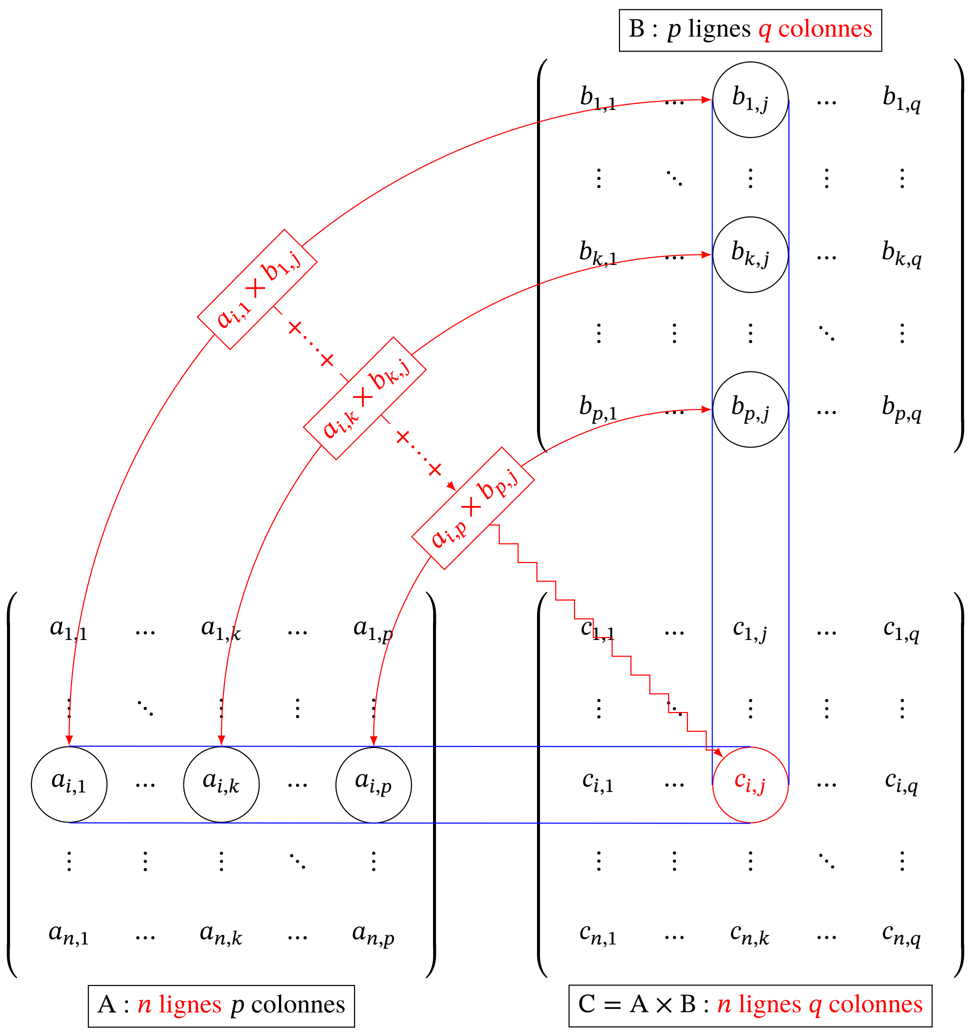
1.3 Produit matriciel

On définit également une multiplication sur les matrices qui peut paraître étrange au premier abord mais dont le sens apparaîtra lorsque nous identifierons matrices et applications linéaires.

Définition 1.4 Produit matriciel

Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit AB comme la matrice $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$



Attention ! On ne multiplie que des matrices de taille compatible, c'est-à-dire que l'on multiplie une matrice à p colonnes par une matrice à p lignes.

Attention ! Non commutativité du produit matriciel Le produit matriciel est non commutatif. En effet, si le produit AB est bien défini, le produit BA ne l'est généralement pas pour des raisons de non compatibilité de taille. Quand bien même il serait défini, on n'a généralement pas $\mathrm{BA} \neq \mathrm{AB}$. Il suffit de prendre $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2 Propriétés du produit matriciel

- Le produit matriciel est **bilinéaire**

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B})\mathrm{C} = \lambda\mathrm{AC} + \mu\mathrm{BC}$$
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall (\mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{A}(\lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{C}) = \lambda\mathrm{AB} + \mu\mathrm{AC}$$

- Le produit matriciel est **associatif**

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$$

Exercice 1.1

Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $(i, j, k, l) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$, $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,l} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,l}$.

1.4 Transposition

Définition 1.5 Transposée

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $(a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{A}^{\top}$.

Remarque. Concrètement, l'opération de transposition échange les lignes et les colonnes des matrices.

Remarque. La transposée d'une matrice carrée est une matrice carrée de même taille.

Remarque. Dans certains ouvrages, la tranposée d'une matrice A est également notée ${}^t\mathrm{A}$.

Proposition 1.3 Propriétés de la transposition

- La transposition est linéaire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ (\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B})^{\top} = \lambda\mathrm{A}^{\top} + \mu\mathrm{B}^{\top}$$

- La transposition est involutive :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (\mathrm{A}^{\top})^{\top} = \mathrm{A}$$

- Transposée d'un produit :

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (\mathrm{AB})^{\top} = \mathrm{B}^{\top}\mathrm{A}^{\top}$$

1.5 Matrices définies par blocs

Matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. On peut définir une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+p,q+r}(\mathbb{K})$ à l'aide de ces quatre matrices de la façon suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$$

Produit de matrices définies par blocs

Le produit de deux matrices définies par blocs s'effectue de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + CF & AG + CH \\ \hline BE + DF & BG + DH \end{array}\right)$$

Attention ! Il faut bien évidemment que les différentes matrices soient de taille compatible :

- le nombre de **colonnes** de A et B doit être le nombre de **lignes** de E et G ;
- le nombre de **colonnes** de C et D doit être le nombre de **lignes** de F et H.

Remarque. La transposée de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$ est la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A^{\mathsf{T}} & B^{\mathsf{T}} \\ \hline C^{\mathsf{T}} & D^{\mathsf{T}} \end{array}\right)$.

2 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

2.1 Opérations élémentaires et pivot de Gauss

Définition 2.1 Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice les opérations suivantes :

- échange de deux colonnes, notée $C_i \leftrightarrow C_j$;
- multiplication d'une colonne par un scalaire non nul α, notée $C_i \leftarrow \alpha C_i$;
- addition d'un multiple d'une colonne à une autre, notée $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

On définit de même les opérations élémentaires sur les lignes :

- échange de deux lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul α, notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre, notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Remarque. Un échange peut s'écrire à l'aide des autres opérations. En effet, l'échange $C_i \leftrightarrow C_j$ peut s'écrire comme la suite d'opérations $C_i \leftarrow C_i + C_j$, $C_j \leftarrow C_j - C_i$, $C_i \leftarrow C_i + C_j$, $C_j \leftarrow -C_j$. De même pour les lignes.

Proposition 2.1

On peut échelonner une matrice en colonnes à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes.
On peut échelonner une matrice en lignes à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

Méthode **Pivot de Gauss**

Le pivot de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes **ou** les colonnes d'une matrice pour se ramener à une forme échelonnée en lignes ou en colonnes.

2.2 Interprétation matricielle

Proposition 2.2 Matrices élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose :

$$\mathrm{P}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i} + \mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{j,j} \qquad \mathrm{D}_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)\mathrm{E}_{i,i} \qquad \mathrm{T}_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha\mathrm{E}_{i,j}$$

Pour une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

- l'opération $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ correspond à la multiplication à droite par $\mathrm{P}_{i,j}$;
- l'opération $\mathrm{C}_i \leftarrow \alpha\mathrm{C}_i$ correspond à la multiplication à droite par $\mathrm{D}_i(\alpha)$;
- l'opération $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \alpha\mathrm{C}_i$ correspond à la multiplication à droite par $\mathrm{T}_{i,j}(\alpha)$.

Pour une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- l'opération $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ correspond à la multiplication à gauche par $\mathrm{P}_{i,j}$;
- l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\mathrm{L}_i$ correspond à la multiplication à gauche par $\mathrm{D}_i(\alpha)$;
- l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha\mathrm{L}_j$ correspond à la multiplication à gauche par $\mathrm{T}_{i,j}(\alpha)$.

Ces matrices sont appelées des matrices élémentaires.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} &&&\mathrm{C}_i&&&&\mathrm{C}_j&&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathrm{L}_i \\ \\ \\ \\ \mathrm{L}_j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ &\ddots&&&&&&&&& \\ &&1&&&&&&&& \\ &&&0&&&&1&&& \\ &&&&1&&&&&& \\ &&&&&\ddots&&&&& \\ &&&&&&1&&&& \\ &&&1&&&&0&&& \\ &&&&&&&&1&& \\ &&&&&&&&&\ddots& \\ &&&&&&&&&&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de transposition $\mathrm{P}_{i,j}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} &&&\mathrm{C}_i&&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathrm{L}_i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&&& \\ &&&\alpha&&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de dilatation $\mathrm{D}_i(\alpha)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} &&&&\mathrm{C}_j&& \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{L}_i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&\alpha&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de transvection $\mathrm{T}_{i,j}(\alpha)$

Remarque. Les $\mathrm{P}_{i,j}$ sont des matrices de permutation ou plus exactement de **transposition**.
Les $\mathrm{D}_i(\alpha)$ sont des matrices de **dilatation**.
Les $\mathrm{T}_{i,j}(\alpha)$ sont des matrices de **transvection**.
Une matrice de transposition peut s'écrire comme un produit de matrices de dilatation et de transvection.

Remarque. Ce qu'il faut surtout retenir, c'est que les opérations sur les colonnes correspondent à des multiplications à droite et les opérations sur les lignes à des multiplications à gauche.

3 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Notation 3.1

On appelle **matrice identité de taille** n la matrice carrée de taille n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres nuls.
On a donc $\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\delta_{i,j}$ est le **symbole de Kronecker** qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.

Proposition 3.1 Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. L'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité I_n.
Pour $n > 1$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif et non intègre.

Remarque. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est même une $\mathbb{K}$-algèbre : c'est à la fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un anneau et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $(\lambda.\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\lambda.\mathrm{B}) = \lambda.(\mathrm{AB})$.

Exemple 3.1

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{AB} = 0$ mais $\mathrm{A} \neq 0$ et $\mathrm{B} \neq 0$.

Remarque. Comme dans tout anneau, une matrice A est dite nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^n = 0$. Par exemple, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Exercice 3.1

Montrer que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{vect}(\mathrm{I}_n)$.

Méthode **Calcul de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur**

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$. En notant R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P, $\mathrm{A}^n = \mathrm{R}_n(\mathrm{A})$.

Exercice 3.2

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode **Calcul de puissances à l'aide de la formule du binôme**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant un anneau, la formule du binôme est vraie pour deux matrices carrées qui **commutent**.

Exercice 3.3

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.2.1 Matrices triangulaires

Définition 3.1 Matrices triangulaires inférieures et supérieures

On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) toute matrice carrée dont tous les coefficients situés au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls.
On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- T est triangulaire supérieure si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour $i > j$.
- T est triangulaire inférieure si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour $i < j$.

Remarque. Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) **stricte** si elle est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et si ses coefficients diagonaux sont nuls.
Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

- T est triangulaire supérieure stricte si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$.
- T est triangulaire inférieure stricte si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour $i \leq j$.

Proposition 3.2

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) sont les produits des coefficients diagonaux de ces matrices.

Remarque. La transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit une involution linéaire (et donc un isomorphisme) de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

3.2.2 Matrices diagonales

Définition 3.2 Matrices diagonales

On appelle matrice diagonale toute matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls.
Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de taille n dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
L'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sera noté $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 3.3

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension n et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, les coefficients diagonaux d'un produit de matrices diagonales sont les produits des coefficients diagonaux de ces matrices.

3.2.3 Matrices diagonales par blocs et triangulaires par blocs

Définition 3.3 Matrices triangulaires par blocs

On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire supérieure par blocs** s'il existe une famille de matrices $(\mathrm{A}_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq r}$ de tailles «adéquates» telle que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \cdots & \mathrm{A}_{1,r} \\ 0 & \mathrm{A}_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{A}_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_{r,r} \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire inférieure par blocs** s'il existe une famille de matrices $(\mathrm{A}_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq r}$ de tailles «adéquates» telle que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{A}_{r,1} & \cdots & \mathrm{A}_{r,r-1} & \mathrm{A}_{r,r} \end{pmatrix}$$

Définition 3.4 Matrices diagonales par blocs

On dit qu'une matrice carrée A est diagonale par blocs s'il existe des matrices carrées $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r$ telles que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix}$$

3.2.4 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 3.5 Matrice symétrique ou antisymétrique

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si $\mathrm{A}^\mathsf{T} = \mathrm{A}$.
- On dit que A est **antisymétrique** si $\mathrm{A}^\mathsf{T} = -\mathrm{A}$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. La dénomination «symétrique» ou «antisymétrique» provient de la symétrie des coefficients par rapport à la diagonale.

- A est symétrique si et seulement si $\mathrm{A}_{j,i} = \mathrm{A}_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
- A est antisymétrique si et seulement si $\mathrm{A}_{j,i} = -\mathrm{A}_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle.

Attention ! Le produit de deux matrices symétriques (resp. antisymétriques) n'est pas forcément une matrice symétrique (resp. antisymétrique).

Proposition 3.4

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 3.5

Montrer que la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

3.3 Matrices inversibles

Rappel **Inversibilité**

L'inversibilité des matrices est à comprendre dans le sens de l'inversibilité dans un anneau. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. A est donc inversible s'il existe $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Attention ! L'inversibilité n'a de sens que pour les matrices **carrées** !

Remarque. On verra plus tard qu'il est suffisant d'avoir seulement $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour affirmer que A est inversible d'inverse B.

Définition 3.6 Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire de degré n sur** $\mathbb{K}$, noté $GL_n(\mathbb{K})$, le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.5 Propriétés de l'inversion

Inversibilité et produit Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$. Alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Involution Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Inversibilité et puissance Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$ (on note A^{-k}).

Inversibilité et transposée Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Méthode **Calcul de l'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur**

Pour déterminer l'inverse d'une matrice A, on peut déterminer un polynôme annulateur de A i.e. un polynôme P tel que $P(A) = 0$. On peut alors déterminer A^{-1} sous la forme d'un polynôme en A.

Exercice 3.6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Proposition 3.6 Inversibilité et inverse des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de T.

Proposition 3.7 Inversibilité et inverse des matrices diagonales

Une matrice diagonale D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, D^{-1} est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de D.

Exemple 3.2

Les matrices de permutation, de dilatation et de transvection sont inversibles : $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$, $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (si $\alpha \neq 0$) et $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$.

Proposition 3.8

Toute matrice inversible peut être transformée en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les colonnes uniquement ou à l'aide d'opérations sur les lignes uniquement.

Méthode **Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss-Jordan**

Supposons que l'on ait à inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. On écrit I_3 **à droite** de A et on effectue les mêmes opérations élémentaires sur les **lignes** de A et I_3 de manière à transformer A en I_3. La suite d'opérations sur les lignes de A correspondra à une multiplication à gauche par A^{-1} : I_3 sera donc transformé en A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On annule dans la première colonne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Puis dans la deuxième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

On met des 1 sur la diagonale.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & -L_2 \\ L_3 & \leftarrow & -L_3 \end{array}$$

On annule au-dessus de la diagonale.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On aurait également pu placer I_3 **au-dessous** de A et effectuer des opérations élémentaires sur les **colonnes**.

Remarque. Si jamais la matrice donnée n'est pas inversible, la méthode précédente donnera une ligne ou une colonne nulle, ce qui montre la non inversibilité.

Attention ! Dans la méthode de Gauss-Jordan, on effectue des opérations sur les lignes **ou** sur les colonnes. Jamais sur les deux en même temps !

Explication de la méthode de Gauss-Jordan

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.
Supposons qu'on pivote uniquement sur les lignes d'une matrice A. La transformation de la matrice A en la matrice I_n se traduit par l'existence de matrices élémentaires $G_1, \dots G_k$ telles que $G_k \dots G_1 A = I_n$. On a donc $G_k \dots G_1 = A^{-1}$. Comme on effectue les mêmes opérations sur I_n, celle-ci est transformée en $G_k \dots G_1 I_n = A^{-1}$.
Supposons qu'on pivote uniquement sur les colonnes d'une matrice A. La transformation de la matrice A en la matrice I_n se traduit par l'existence de matrices élémentaires $G_1, \dots G_k$ telles que $AG_1 \dots G_k = I_n$. On a donc $G_1 \dots G_k = A^{-1}$. Comme on effectue les mêmes opérations sur I_n, celle-ci est transformée en $I_n G_1 \dots G_k = A^{-1}$.

Remarque. L'algorithme du pivot de Gauss permet de montrer que toute matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme un produit de matrices de dilatation et de transvection. On dit que ces matrices engendrent le groupe $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3.7

Déterminer l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.8 **Matrices diagonales par blocs**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $M = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$ est inversible si et seulement si A et B le sont et déterminer M^{-1} dans ce cas.
Étendre ce résultat à une matrice diagonale par blocs.

Exercice 3.9 **Matrices triangulaires par blocs**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$ est inversible si et seulement si A et B le sont.
Étendre ce résultat à une matrice triangulaire par blocs.

3.4 Trace

Définition 3.7 Trace

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A.

Proposition 3.9 Propriétés de la trace

(i) La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{tr}(A)$.

(iii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Attention ! Si $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, on peut affirmer que d'une part $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$ et, d'autre part que $\mathrm{tr}(CBA) = \mathrm{tr}(ACB) = \mathrm{tr}(BAC)$. Mais en général

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(CBA) = \mathrm{tr}(ACB) = \mathrm{tr}(BAC)$$

4 Représentation matricielle des vecteurs et des applications linéaires

4.1 Matrices et vecteurs

Définition 4.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne de taille n, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$, formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix}$$

Exemple 4.1

La matrice de $(1, -2, 4, -3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exemple 4.2

La matrice de $4X^3 + 3X^2 - 2X - 5$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Remarque. En particulier, si on considère la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on peut associer à une matrice colonne de taille n un unique vecteur de $\mathbb{K}^n$.
On identifiera souvent les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aux vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Définition 4.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $n \times p$, notée $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, formée des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (e_i^*(f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 4.3

La matrice de la famille $((1,2,-3),(0,1,2),(-2,1,3),(4,5,-1))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 4.4

La matrice de la famille $(-X^3+X^2-1, 2X^2-3, 4X^3+3X^2-2X-5)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.2 Matrices et bases

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

4.2 Matrices et applications linéaires

Définition 4.3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ des bases respectives de E et F. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ la matrice de taille $n \times p$:

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

$$\begin{array}{ccc}
u(e_1) & \cdots & u(e_p) \\
\left(\begin{array}{ccc} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{array}\right) & & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \\
\hline
\sum_{i=1}^{n} A_{i,1} f_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} A_{i,p} f_i
\end{array}$$

Exemple 4.5

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, 2x - y + 3z) \end{array}\right.$. On vérifie que f est bien une application linéaire. Notons $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Alors $f(1,0,0) = (1,2)$, $f(0,1,0) = (1,-1)$ et $f(0,0,1) = (-1,3)$ donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 4.6

Soit $\mathrm{T} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{X}^4\mathrm{P}^{(3)} + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(-\mathrm{X}) \end{array}\right.$. On vérifie que T est bien une application linéaire. Notons $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_5$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{T}(1) = 2$, $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = 2-\mathrm{X}$, $\mathrm{T}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2+4$, $\mathrm{T}(\mathrm{X}^3) = 6\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^3+8$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}^4) = 24\mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 + 16$ donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_5}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ des bases respectives de E et F. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

Corollaire 4.1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \dim \mathrm{E} \times \dim \mathrm{F}$.

Définition 4.4

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

Remarque. Quitte à identifier matrices colonnes et vecteurs, l'application linéaire canoniquement associée à A est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}\right.$.

Exemple 4.7

L'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - 3y + 4z, -x + 2z) \end{array}\right.$$

Proposition 4.4 Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de E et F. Soient $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On pose $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$, $\mathrm{Y} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(y)$ et $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$. Alors

$$y = u(x) \iff \mathrm{Y} = \mathrm{UX}$$

Exemple 4.8

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ de matrice $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $x = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. La matrice de x dans $\mathcal{B}_3$ est $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{UX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$, $u(x) = (0, 9)$.

Proposition 4.5 Interprétation matricielle d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ des bases respectives de E, F, G. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$

Remarque. Ces deux dernières propositions nous disent tout simplement que toute l'algèbre linéaire en dimension finie peut être interprété en termes de matrices.

Proposition 4.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même** dimension de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors u est bijective si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible, et dans ce cas :

$$\left(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)\right)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

Matrices de Vandermonde

Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On pose $\mathrm{M} = (x_i^j)_{0 \le i,j \le n}$. M est inversible si et seulement si les x_i sont distincts entre eux deux à deux car M est la matrice de l'application linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(x_0), \dots, \mathrm{P}(x_n)) \end{array}\right.$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.

4.3 Matrices et endomorphismes

Dans le cas des endomorphismes, on utilise souvent la **même** base de départ et d'arrivée pour la représentation matricielle.

Définition 4.5 Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice carrée de taille n :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$$

$$\begin{array}{cccc}
u(e_1) & \cdots & u(e_n) & \\
\left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}_{1,1} & \cdots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{A}_{n,1} & \cdots & \mathrm{A}_{n,n} \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\
\hline
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{i,1} e_i & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{i,n} e_i &
\end{array}$$

Exemple 4.9 Matrice de l'identité

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice de Id_{E} dans toute base de E est I_n.

Exemple 4.10 Matrice d'un projecteur

La matrice d'un projecteur p d'un espace vectoriel de dimension finie E dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_q & 0_{q,r} \\ \hline 0_{r,q} & 0_q \end{array}\right)$ avec $q = \dim \mathrm{Im}\, p$ et $r = \dim \mathrm{Ker}\, p$.

Exemple 4.11 Matrice d'une symétrie

La matrice d'une symétrie s d'un espace vectoriel de dimension finie E dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_q & 0_{q,r} \\ \hline 0_{r,q} & -\mathrm{I}_r \end{array}\right)$ avec $q = \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $r = \dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

Exemple 4.12 Sous-espace stable

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimnension finie E. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. On note $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Si F est stable par u, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ où A et B sont des matrices carrées de tailles respectives $\dim \mathrm{F}$ et $\dim \mathrm{G}$. Plus précisément, A est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F dans la base de F extraite de $\mathcal{B}$.

Si F et G sont stables par u, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ où A et B sont à nouveau des matrices carrées de tailles respectives $\dim \mathrm{F}$ et $\dim \mathrm{G}$. Plus précisément, A et B sont respectivement les matrices des endomorphismes induits par u sur F et G dans les bases de F et G extraites de $\mathcal{B}$.

Proposition 4.7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$ est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque. Comme précédemment, on peut associer à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4.1

Montrer qu'une matrice triangulaire stricte est nilpotente à l'aide de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé.

Proposition 4.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupes.

Corollaire 4.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors u est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible et, dans ce cas, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$.

Exercice 4.2

Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array}\right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Exercice 4.3

On pose $\mathrm{A} = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$ en convenant que $\binom{j}{i} = 0$ pour $i > j$. En remarquant que A est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Corollaire 4.3

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Remarque. En toute généralité, on devrait prouver que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ **et** $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$. La proposition précédente nous dit donc, que dans le cadre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de vérifier l'**une** des deux conditions.

Exercice 4.4

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{AB} = \mathbb{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2.$$

Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Méthode **Inversibilité et inversion d'une matrice**

Pour déterminer l'inversibilité d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1} le cas échéant, on écrit le système $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ avec $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ et $\mathrm{Y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ où les inconnues sont $x_1, \dots, x_n$. Si le système admet une solution, elle est du type $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$ ce qui permet d'identifier A^{-1}.

4.4 Matrices et formes linéaires

Définition 4.6 Matrice d'une forme linéaire dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit enfin $\varphi \in E^*$. On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice ligne de taille p :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$$

Remarque. En particulier, si on considère la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on peut associer à toute matrice ligne de taille p une unique forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$.
On identifiera souvent les matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ aux formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$.

Définition 4.7 Matrice d'une famille de formes linéaires dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires sur E. On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $n \times p$, notée $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (\varphi_i(e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

5 Noyau, image et rang d'une matrice

5.1 Noyau et image

Définition 5.1

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose :

$$\text{Ker}\, A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\} \qquad \text{Im}\, A = \{AX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Remarque. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$ est une application linéaire. Ker A et Im A sont respectivement le noyau et l'image de cette application linéaire. Ker A et Im A sont donc des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque. Quitte à identifier les matrices colonnes de taille p et n aux vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on peut dire que Ker A et Im A sont les noyau et image de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 5.1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Im A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A.

Méthode **Calcul du noyau et de l'image**

Pour déterminer le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il suffit de résoudre le système correspondant à l'équation $AX = 0$.
L'image d'une matrice A est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A.

Proposition 5.2 Lien entre noyau, image d'une application linéaire et de sa matrice

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension n et p. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(x) \end{array}\right.$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, u$ sur $\mathrm{Ker}\, \mathrm{A}$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(x) \end{array}\right.$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ sur $\mathrm{Im}\, \mathrm{A}$.

Remarque. Comme pour les applications linéaires, on a des résultats classiques d'inclusions de noyau et d'image pour les matrices :

- $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{AB})$;
- $\mathrm{Im}(\mathrm{AB}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{A})$;
- $\mathrm{AB} = 0 \iff \mathrm{Im}\, \mathrm{B} \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{A}$.

Méthode **Calcul d'une base du noyau et de l'image d'une application linéaire grâce à sa matrice**

Soit u une application linéaire de matrice A dans deux bases. On sait déterminer une base de Ker A et Im A. Les isomorphismes précédents nous permettent d'en déduire une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$.

Exemple 5.1

Déterminer le noyau et l'image de l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}-1) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array}\right.$.

Proposition 5.3 Noyau et inversibilité

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}\, \mathrm{A} = \{0\}$.

Proposition 5.4

Les opérations élémentaires sur les **colonnes** d'une matrice laissent son **image** inchangée.
Les opérations élémentaires sur les **lignes** d'une matrice laissent son **noyau** inchangé.

Méthode **Déterminer le noyau et l'image d'une matrice en même temps !**

Supposons que l'on veuille déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On écrit A puis on ajoute au-dessous une matrice identité.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on pivote sur les colonnes.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} C_2 & \leftarrow & C_2 - 2C_1 \\ C_3 & \leftarrow & C_3 - C_1 \end{array}$$

Encore une fois pour avoir la dernière colonne nulle.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lcl} C_3 & \leftarrow & C_3 - C_2 \end{array}$$

On a alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Attention ! Pour appliquer cette méthode, on pivote uniquement sur les **colonnes**.

5.2 Rang

Définition 5.2 Rang d'une matrice

Soit A une matrice. On pose $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$.

Remarque. Le rang d'une matrice est également le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$.

Remarque. On verra plus tard que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$. Le rang d'une matrice est aussi le rang des vecteurs lignes de A.

Proposition 5.5 Rang d'une famille de vecteurs et de sa matrice

Soient $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille vecteurs de E. Alors $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$.

Proposition 5.6 Rang d'une application linéaire et de sa matrice

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u))$.

Proposition 5.7 Rang d'un endomorphisme et de sa matrice

Soient $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

Corollaire 5.1 Théorème du rang matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $p = \mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A)$.

Corollaire 5.2 Rang et inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}\,A = n$.

Lemme 5.1

Soient $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0 & A \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline C & A \end{array}\right) = 1 + \mathrm{rg}\,A$$

Méthode **Calcul du rang**

On utilise le pivot de Gauss (sur les lignes ou les colonnes) pour annuler des coefficients sur la première ligne et le lemme précédent pour se ramener à une matrice de taille inférieure. On supprime également les lignes ou colonnes nulles apparaissant au cours des opérations de pivot.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ -20 & -5 & 3 & -10 & -1 \end{pmatrix}
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 55 & 43 & 50 & 19 \end{pmatrix}
\begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 + 20L_1 \end{array} \\
&= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 55 & 43 & 50 & 19 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 8 & 7 & 11 & 5 \\ 55 & 43 & 50 & 19 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -9 & -45 & -27 \\ 0 & -67 & -335 & -201 \end{pmatrix}
\begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 8L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 55L_1 \end{array} \\
&= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -9 & -45 & -27 \\ -67 & -335 & -201 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -67 & -335 & -201 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -\frac{1}{9}L_1 \\
&= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 67L_1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Remarque. Pour le calcul du rang, on peut effectuer des opérations de pivot sur les lignes et les colonnes en même temps.

Proposition 5.8 Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg}(A)$.
- Si $B \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(A)$.

6 Changements de bases, équivalence et similitude

6.1 Changement de base

Définition 6.1 Matrice de passage

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Proposition 6.1

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarque. On peut remarquer que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Proposition 6.2 Changement de base pour les vecteurs

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $x \in E$. On pose $X = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Alors $X = PX'$.

Attention ! La formule de changement de base est bien $X = PX'$ et non $X' = PX$.

Proposition 6.3 Changement de base pour les applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit également F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, $Q = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$, $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ et $A' = \operatorname{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$. Alors $A' = Q^{-1}AP$.

Proposition 6.4 Changement de base pour les endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $A' = \operatorname{mat}_{\mathcal{E}'}(u)$. Alors $A' = P^{-1}AP$.

Méthode Se souvenir des formules de changement de base

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, $y = u(x) \in E$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Notons respectivement A, X, Y les matrices de u, x, y dans la base $\mathcal{B}$ et A', X', Y' les matrices de u, x, y dans la base $\mathcal{B}'$. Notons enfin P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On a $Y = AX$, $X = PX'$ et $Y = PY'$. On en déduit $Y = P^{-1}APX$. Or $Y' = A'X'$ donc $A' = P^{-1}AP$.

Proposition 6.5 Changement de base pour les formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit $\varphi \in E^*$. On note $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, $L = \operatorname{mat}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ et $L' = \operatorname{mat}_{\mathcal{E}'}(\varphi)$. Alors $L' = LP$.

6.2 Matrices équivalentes et rang

Définition 6.2 Matrices équivalentes

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A' est **équivalente** à A si et seulement si il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$.

Proposition 6.6

La relation «être équivalente à» est une relation d'équivalence.

Remarque. On pourra alors dire sans ambiguïté que deux matrices sont équivalentes plutôt que de dire que l'une est équivalente à l'autre.

Exercice 6.1

Montrer que si A et B sont deux matrices équivalentes, il en est de même de $\mathrm{A}^\top$ et $\mathrm{B}^\top$.

Proposition 6.7

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux couples de bases.

Notation 6.1

Lorsque l'on travaille dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $0 \leq r \leq \min(n,p)$, on note $\mathrm{J}_{n,p,r}$ la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$$

Il est clair que la matrice $\mathrm{J}_{n,p,r}$ est de rang r.

Proposition 6.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors u est de rang r si et seulement si il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et F telles que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{J}_{n,p,r}$.

Corollaire 6.1 Caractérisation du rang

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors M est de rang r si et seulement si M est équivalente à $\mathrm{J}_{n,p,r}$.

Exercice 6.2

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $r = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$. Déterminer $\mathrm{U} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{V} \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{UAV} = \mathrm{J}_r$.

Corollaire 6.2

Deux matrices ont même rang si et seulement si elles sont équivalentes.

Proposition 6.9 Invariance du rang par transposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} A^{\mathsf{T}} = \operatorname{rg} A$.

Corollaire 6.3

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Définition 6.3 Matrice extraite

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** de A toute matrice de la forme $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ où $I \subset [\![1, n]\!]$ et $J \subset [\![1, p]\!]$.

Remarque. Plus prosaïquement, une matrice extraite est une matrice obtenue en conservant certaines ou toutes les lignes ou colonnes de la matrice initiale ou, de manière équivalente, en supprimant éventuellement certaines lignes ou colonnes de la matrice initiale.

Exemple 6.1

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 11 & 13 & 14 \\ 16 & 18 & 19 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. On a en effet conservé les colonnes 1, 3, 4 et les lignes 1, 3, 4.

Proposition 6.10

Le rang d'une matrice extraite est inférieur au rang de la matrice dont elle est extraite.

Proposition 6.11

Le rang d'une matrice est égale à la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de cette matrice.

6.3 Matrices semblables et trace

Définition 6.4 Matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est **semblable** à A si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Exemple 6.2

La seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité elle-même.
La seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle.

Proposition 6.12

La relation de similitude («être semblable à») est une relation d'équivalence.

Remarque. On pourra alors dire sans ambiguïté que deux matrices sont semblables plutôt que de dire que l'une est semblable à l'autre.

Remarque. Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.

Remarque. Si deux matrices sont semblables, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

Remarque. Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n sont semblables pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible). Plus précisément, s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si A est inversible).

Exercice 6.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.13

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

Proposition 6.14

Deux matrices semblables ont la même trace.

Attention ! La réciproque est fausse. Deux matrices de même trace ne sont même pas nécessairement équivalentes.

Définition 6.5 Trace d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors la trace de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est indépendante de la base choisie. On l'appelle la trace de l'endomorphisme u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.

Exemple 6.3 Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Proposition 6.15 Propriétés de la trace

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(i) La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

(ii) Pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

7 Systèmes linéaires

Interprétation matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire (S) de n équations à p inconnues peut toujours se mettre sous la forme $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et où $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est l'inconnue. B est alors appelé le second membre de ce système d'équations.
Le système linéaire homogène ou sans second membre associé à S est le système $\mathrm{AX} = 0$.

Remarque. Résoudre un système linéaire, c'est également rechercher les coefficients des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes de A égales à B.
Si on note $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ les formes linéaires canoniquement associées aux lignes de A, c'est également rechercher les vecteurs $x \in \mathbb{K}^n$ tels que $\varphi_i(x) = b_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
C'est également déterminer l'intersection des hyperplans affines d'équations $\varphi_i(x) = b$.

Définition 7.1

Le rang du système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est le rang de A.
Un système linéaire est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Proposition 7.1 Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions du système $\mathrm{AX} = 0$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ de dimension $n - \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.
Le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'a de solution que si $\mathrm{B} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{A}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est le sous-espace affine $\mathrm{X}_0 + \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$ où X_0 est une solution particulière.

Méthode **Résolution d'un système linéaire**

La résolution d'un système linéaire peut se faire de la manière suivante.

- On forme une nouvelle matrice $\mathrm{C} = (\mathrm{A}|\mathrm{B})$ en plaçant B à droite de A.
- On effectue un pivot de Gauss sur les **lignes** de C de manière à se ramener à une matrice $\mathrm{C}' = (\mathrm{A}'|\mathrm{B}')$. Les solutions de $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ sont les solutions de $\mathrm{A}'\mathrm{X} = \mathrm{B}'$. La résolution du second système est plus simple car A′ est sous forme triangulaire.

Définition 7.2 Système de Cramer

On dit que le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est de Cramer si A est inversible (en particulier $n = p$).

Proposition 7.2

Le système $AX = B$ possède une unique solution si et seulement si A est inversible. Dans ce cas, cette unique solution est $A^{-1}B$.

Remarque. En pratique, on ne calcule jamais A^{-1} pour obtenir la solution. On triangularise le système avec la méthode décrite précédemment.

Exercice 7.1

Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & 3x_n & = & 1 \\
 & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & nx_n & = & 1
\end{array}\right.$$