Suites numériques

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1

On appelle suite réelle toute famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée sur $\mathbb{N}$ ou, de manière équivalente, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ peut-être notée u (application) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (famille). On emploie également la notation (u_n). Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le terme général de u est noté u_n (famille) plutôt que $u(n)$ (application).

Remarque. Par esprit de simplification, on ne traitera dans ce chapitre que des suites définies à partir du rang 0. On adaptera pour des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de deux manières différentes.

De manière explicite On donne une formule explicite de u_n en fonction de n du type $u_n = f(n)$.

Par récurrence On donne les k premiers termes de la suite et une relation de récurrence exprimant u_n en fonction des k termes précédents. On dit alors que (u_n) est une suite récurrente d'ordre k. Une suite récurrente d'ordre 1 vérifie donc une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

De manière implicite u_n est défini comme solution d'une équation dépendant de n.

Exemple 1.1

- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est une suite définie de manière explicite.
- La suite (u_n) de premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente d'ordre 2.

Attention ! Une relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite. Par exemple, il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$.

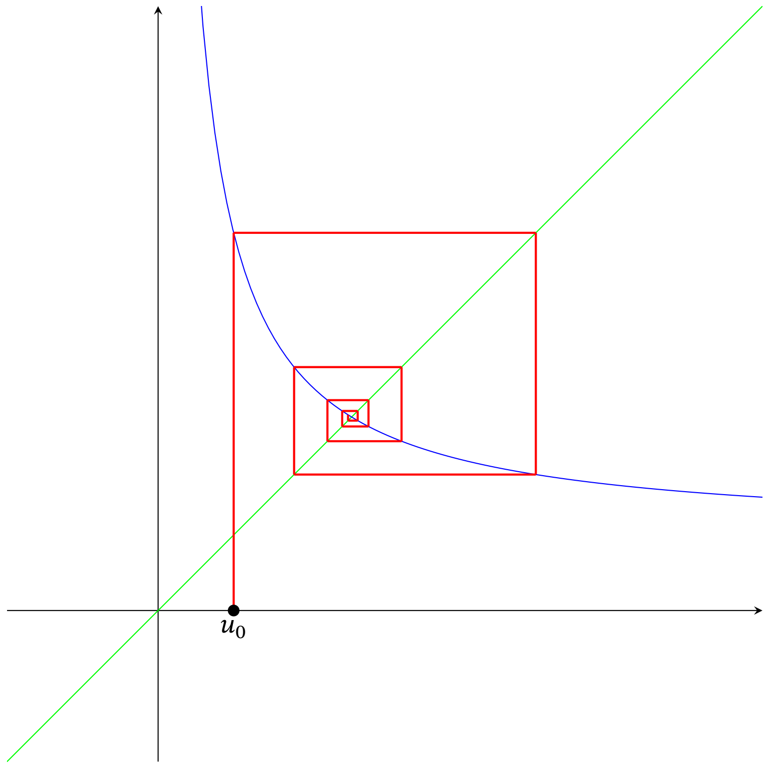
La proposition qui suit permet néanmoins de se tirer d'affaire.

Proposition 1.1

Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que D est stable par f i.e. $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$. Alors, pour tout $d \in \mathrm{D}$, il existe une unique suite définie par $u_0 = d$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{D}$.

Représentation graphique d'une suite récurrente d'ordre 1

On obtient la représentation graphique d'une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant le graphe de f et la première bissectrice.



1.2 Vocabulaire

Définition 1.2 Suites constantes, stationnaires

Une suite (u_n) est **constante** s'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{C}$. Une suite est **stationnaire** si elle constante à partir d'un certain rang.

Définition 1.3

On dit qu'une suite (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \mathrm{C}$ (resp. $u_n \geq \mathrm{C}$). On dit qu'une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Méthode **Prouver qu'une suite est bornée**

Pour prouver qu'une suite (u_n) est bornée, il est nécessaire et suffisant d'exhiber une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \mathrm{C}$.

Définition 1.4 Sens de variation

Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \leq p \implies u_n \leq u_p$$

Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.
Une suite réelle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n < p \implies u_n < u_p$$

Une suite est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Attention ! Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas par exemple des suites géométriques de raison négative.

Proposition 1.2

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

- (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$;
- (u_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$;
- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$;
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

Méthode **Sens de variation d'une suite**

Pour déterminer le sens de variation d'un suite (u_n) :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si la suite est **strictement positive**, on peut étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Remarque. On utilisera la première méthode lorsque le terme général est défini à partir de sommes et de différences.
On utilisera la deuxième méthode lorsque le terme général est défini à partir de produits et de quotients.

Exercice 1.1

Déterminer le sens de variation des suites de terme généraux $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $v_n = \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$.

Proposition 1.3

Si une suite (u_n) est définie explicitement par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante, alors (u_n) est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante.

Attention ! La réciproque est **fausse**.

1.3 Suites classiques

Définition 1.5 Suites arithmétiques

On appelle suite **arithmétique** de **raison** $r \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.6 Suites géométriques

On appelle suite **géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

On a alors $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.7 Suites arithmético-géométriques

On appelle suite **arithmético-géométrique** toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Méthode **Calculer le terme général d'une suite aritmético-géométrique**

Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. On suppose $a \neq 1$ (sinon (u_n) est arithmétique).

- On détermine un point fixe de $x \mapsto ax + b$ i.e. on résout l'équation $x = ax + b$. Comme $a \neq 1$, on trouve une unique solution $l = \dfrac{b}{1-a}$.
- On montre que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison a.
- On en déduit une expression du terme général de $(u_n - l)$ puis de (u_n).

Exercice 1.2

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 3u_n - 4, \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

Définition 1.8 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le **polynôme caractéristique** associée à une telle suite est $X^2 + aX + b$.

Proposition 1.4 Forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Pour $(a,b) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^*$, on note $\mathrm{E}_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, $\mathrm{E}_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.
- Si $\Delta = 0$, $\mathrm{E}_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double du polynôme caractéristique et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, $\mathrm{E}_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles du polynôme caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, $\mathrm{E}_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double réelle du polynôme caractéristique et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$, $\mathrm{E}_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. La donnée de conditions initiales (valeurs de u_0 et u_1) permettent de déterminer les constantes λ et μ.

Exercice 1.3

1. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Définition de la limite

Définition 2.1 Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \mathrm{N} \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$
- On dit que (u_n) admet $+\infty$ pour limite si :
$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \mathrm{N} \implies u_n \geq \mathrm{A}$$
- On dit que (u_n) admet $-\infty$ pour limite si :
$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \mathrm{N} \implies u_n \leq \mathrm{A}$$

Remarque. Les propositions où les inégalités larges finales sont remplacées par des inégalités strictes sont équivalentes.

Remarque.

- Dans le premier cas (limite égale à l), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous à une distance inférieure à ε à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir ε, cela signifie que les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de l quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

- Dans le second cas (limite égale à $+\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous supérieurs à A à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir A, cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands positivement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.
- Dans le troisième cas (limite égale à $-\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous inférieurs à A à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir A, cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands négativement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

Attention ! L'indice N de la définition dépend du choix de ε ou A.

Remarque. On peut condenser ces trois définitions en une seule en utilisant la notion de voisinage. La définition est la suivante.
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \mathrm{N} \implies u_n \in \mathcal{V}$.

Remarque. La définition «epsilonesque» de la limite sert assez peu en pratique. On possède de nombreux théorèmes pour montrer l'existence d'une limite et même la déterminer le cas échéant.

Remarque. On considère toujours la limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$. Considérer la limite de u_n quand n tend vers un entier n'a aucun intérêt.

Exercice 2.1

Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de limite fine. Montrer que cette limite est entière et que u est stationnaire.

Théorème 2.1 Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède une limite, elle est **unique**. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. La relation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ se note aussi souvent $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarque. La notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ signifie en fait deux choses : primo, (u_n) admet une limite ; secundo, cette limite vaut l. On parle toujours de la valeur d'une limite sous réserve d'existence de celle-ci.

Proposition 2.1

Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \iff u_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 2.2

Soit (u_n) une suite admettant $l > 0$ pour limite. Alors (u_n) est minorée par un réel **strictement positif** à partir d'un certain rang.

Remarque. Dire que (u_n) est minorée par un réel **strictement positif** à partir d'un certain rang est plus fort que de dire que (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ est strictement positive mais elle n'est en aucun cas minorée par un réel strictement positif (elle est au mieux minorée par 0).

2.2 Convergence et divergence

Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une suite (u_n) **converge** ou qu'elle est **convergente** si elle possède une limite **finie**. Dans le cas contraire, on dit qu'elle **diverge** ou qu'elle est **divergente**.

Attention ! Une suite divergente est une suite qui ne possède pas de limite **ou** qui tend vers $\pm\infty$.

Proposition 2.3

Toute suite convergente est bornée.

Attention ! La réciproque de cette proposition est **fausse**. Il suffit par exemple de considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

2.3 Limite et suites extraites

Définition 2.3 Suites extraites

Soit (u_n) une suite. On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de (u_n) toute suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels.
On aurait pu également pu définir une suite extraite de (u_n) comme une suite de la forme $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ où $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers.

Exemple 2.1

Pour toute suite (u_n), les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de (u_n).

Lemme 2.1

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Théorème 2.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi l pour limite.

Attention ! Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

Remarque. Le résultat reste vrai si l'on considère une suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ n'est plus forcément une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ mais une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(\varphi(n))$ soit de limite $+\infty$.

Proposition 2.4

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) admettent pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors (u_n) admet également pour limite l.

Méthode **Prouver qu'une suite diverge**

Le théorème précédent permet de montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite par l'absurde. On suppose en effet que (u_n) admet une limite et on exhibe deux suites extraites de (u_n) qui admettent deux limites différentes. Ceci contredit alors l'unicité de la limite.

Exercice 2.2

Montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ n'admet pas de limite.

2.4 Opérations sur les limites

Proposition 2.5 Limite d'une somme

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

Proposition 2.6 Limite d'un produit

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	0	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 2.7 Limite de l'inverse

On suppose que la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } u_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ -\infty \text{ si } u_n < 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ \text{pas de limite sinon} \end{cases}$	0

Remarque.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

Remarque. La limite d'un quotient se déduit des tableaux donnant la limite d'un produit et de l'inverse puisque $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

2.5 Composition par une fonction

Proposition 2.8

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction de limite $\mathrm{L} \in \overline{\mathbb{R}}$ en l. Alors la suite $(f(u_n))$ admet L pour limite.

Corollaire 2.1

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue en l. Alors la suite $(f(u_n))$ admet $f(l)$ pour limite.

Corollaire 2.2 Suite récurrente et point fixe

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que f est continue en l, alors $f(l) = l$ i.e. l est un point fixe de f.

2.6 Limites classiques

Proposition 2.9 Limite d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a \leq -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

Exercice 2.3

Soit $a \in]-1, 1[$. Déterminer la limite de a^{2^n}.

2.7 Passage à la limite

Théorème 2.3 Passage à la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'. Soient $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.
- Si $u_n \leq \mathrm{M}$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq \mathrm{M}$.
- Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $l \geq m$.

Remarque. Autrement dit, le passage à la limite conserve les inégalités **larges**. Il ne conserve pas les inégalités strictes. Par exemple, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$. Mais on a évidemment pas $0 > 0$.

Corollaire 2.3

Soit (u_n) une suite convergeant vers l.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est strictement croissante, alors $u_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est strictement décroissante, alors $u_n > l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Théorèmes d'existence de limites

3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Ces théorèmes proviennent de l'existence d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème des gendarmes/d'encadrement : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut l.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ et $v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $-\infty$.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'**existence** : il prouve l'existence d'une limite. Il est vrai qu'il nous fournit en plus la valeur de la limite. Mais si l'existence de la limite était garantie, le simple théorème de passage à la limite nous aurait fourni la valeur de la limite.

Exercice 3.1

Déterminer la limite de $(n!)$ et de $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

Remarque. Il existe une version «améliorée» du théorème des gendarmes. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \sim w_n$, alors $u_n \sim v_n \sim w_n$.

Corollaire 3.1

Soient (u_n) et (ε_n) deux suites telles que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|u_n| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 3.1

Soient (u_n) une suite, $l \in \mathbb{R}$ et $K \in [0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq K|u_n - l|$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Corollaire 3.2

Soient (u_n) une suite bornée et (ε_n) une suite de limite nulle. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n\varepsilon_n = 0$.

Corollaire 3.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si (u_n) est minorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
- Si (u_n) est majorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

3.2 Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, de la densité

Proposition 3.1

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $c = \sup \mathcal{A}$ (resp. $c = \inf \mathcal{A}$) si et seulement si c est un majorant (resp. un minorant) de $\mathcal{A}$ et s'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite c.

Proposition 3.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A de limite x.

3.3 Théorème de convergence monotone

Ce théorèmes provient à nouveau de l'existence d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 Théorème de convergence monotone

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément,

- toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;
- toute suite décroissante minorée converge, toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Attention ! Une suite décroissante et minorée (resp. majorée) ne converge pas forcément vers son minorant (resp. majorant). Lequel d'ailleurs ?

Attention ! Le majorant ou le minorant doit être une **constante**. Par exemple, si (u_n) est décroissante et si $u_n \geq -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut absolument rien dire sur la convergence de (u_n).

Exercice 3.2

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.

Exercice 3.3

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

Exercice 3.4 ★★ **La série harmonique**

Soient $\geqslant 1$ et

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Quelle alternative en déduit-on quant au comportement asymptotique de $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$,

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

   Décrire le comportement de $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$.

3.4 Suites adjacentes

Définition 3.1 Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.3 Suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Attention ! Si on a seulement $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, on ne peut pas déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ car on ne sait même pas a priori que (u_n) et (v_n) admettent des limites. Ce sont les sens de variations de (u_n) et (v_n) qui garantissent l'existence de ces limites.

Exercice 3.5

Les suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3.6 **Théorème des segments emboîtés**

On appelle segment tout intervalle **fermé** de $\mathbb{R}$ i.e. du type $[a, b]$. On appelle **longueur** du segment $[a, b]$ le réel $b - a$.
Soit (I_n) une suite décroissante de segments (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n$) dont la suite des longeurs tend vers 0. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ est un singleton.
Le résultat est-il toujours vrai si les intervalles I_n ne sont plus fermés ?

Recherche d'un zéro d'une fonction continue par dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On construit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- On suppose avoir défini a_n et b_n. Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$. Sinon, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$.

On montre alors que (a_n) et (b_n) convergent vers un zéro c de f. De plus, $a_n - c \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $b_n - c \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Algorithme 1 Dichotomie

Données : une fonction f
deux réels a et b tels que $f(a)f(b) \leq 0$
un réel strictement positif ε
Résultat : une valeur approchée m d'un zéro de f à ε près

$c \leftarrow a$
$d \leftarrow b$
Tant que $|d - c| > \varepsilon$ **Faire**
  $m \leftarrow \dfrac{c+d}{2}$
  Si $f(c)f(m) \leq 0$ **Alors**
    $d \leftarrow m$
  Sinon
    $c \leftarrow m$
  Fin Si
Fin Tant que
$m \leftarrow \dfrac{c+d}{2}$

3.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est admis.

Théorème 3.4 Bolzano-Weierstrass

De toute suite **bornée**, on peut extraire une sous-suite **convergente**.

Attention ! Une même suite bornée peut admettre plusieurs sous-suites convergeant vers des limites différentes.

Remarque. La démonstration est hors programme mais on peut en donner l'idée :

- On construit par dichotomie une suite (I_n) décroissante de segments emboîtés contenant chacun une infinité de termes de la suite.

- On choisit dans chaque I_n un élément $u_{\varphi(n)}$ de telle sorte que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soit strictement croissante.
- La suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge d'après le théorème des suites adjacentes.

Remarque. Dans le même ordre d'idée, de toute suite réelle non majorée (resp. non minorée), on peut extraire une sous-suite divergeant vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

3.6 Lemme de Césaro (hors programme)

Le théorème suivant est hors programme mais tellement classique qu'il mérite de figurer dans ce chapitre.

Théorème 3.5 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

admet aussi l pour limite.

Remarque. Autrement dit, les **moyennes** successives des termes de la suite (u_n) converge vers la même limite que (u_n). C'est également vrai si on ne débute pas au rang 0. La suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge elle aussi vers l.

Attention ! La réciproque de ce théorème est **fausse** comme on s'en convainc facilement avec la suite de terme général $(-1)^n$.

4 Comparaison de suites

4.1 Définition

Les définitions sont totalement similaires à celles vues dans le cadre des fonctions. C'est encore plus simple puisque dans le cas des suites, on travaille toujours au voisinage de $+\infty$.

Définition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.
- On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (η_n) de limite 1 telle que $u_n = v_n\eta_n$ à partir d'un certain rang.
- On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe une constante K telle que $|u_n| \leq \mathrm{K}|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Méthode **En pratique**

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces trois définitions sont respectivement équivalentes à :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$,
- $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Tout ce qui a été dit sur la comparaison des fonctions reste, mutatis mutandis, vrai pour la compraison des suites. En particulier, on a la propritété suivante :

Proposition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Proposition 4.2 Encadrement et équivalence

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \sim w_n$ alors

$$u_n \sim v_n \sim w_n$$

4.2 Comparaison des suites de références

Suites de référence

On appelle suites de référence les suites (a^n), (n^α), $(\ln n)^\beta$, $(n!)$ avec $a > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.3

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff a^n = o(b^n)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 0$. Alors $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^n = o(n!)$.

Exercice 4.1

Déterminer un équivalent de $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\frac{\pi}{n}$.

Exercice 4.2

Déterminer la limite de $n\left(\frac{\pi}{2}e^{\frac{1}{n}} - \arccos\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$. Piège !

Proposition 4.4 Formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Corollaire 4.1

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$$

4.3 Suites implicites

On appelle **suite implicite** une suite dont le terme général u_n est donné comme la solution d'une équation dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.4 ★★★

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
2. Déterminer un équivalent de (u_n).
3. On pose $v_n = u_n - n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite ℓ de (v_n).
4. Déterminer un équivalent de $(v_n - \ell)$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).

5 Suites récurrentes d'ordre 1

Une suite récurrente d'ordre 1 est tout simplement une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la convergence de (u_n). On supposera f continue sur son ensemble de définition. On sait alors que **si** (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f. Graphiquement un point fixe est l'abscisse (ou l'ordonnée) de l'intersection du graphe de f et de la première bissectrice.

Méthode **Étude d'une suite récurrente d'ordre** 1

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- On trace le graphe de f et la première bissectrice et on place les premiers termes de la suite (u_n) afin d'avoir une idée de son comportement asymptotique.
  Si f est croissante
- On recherche le signe et les zéros de $x \mapsto f(x) - x$ (i.e. les points fixes de f).
- Suivant la position de u_0 par rapport au(x) point(s) fixe(s) de f on en déduit une majoration/minoration de (u_n) par un point fixe ainsi que son sens de variation.
- On utilise le théorème de convergence monotone et la convergence vers un point fixe pour conclure. On raisonne par l'absurde pour prouver la divergence le cas échéant.
  Si f est décroissante
- En remarquant que $f \circ f$ est croissante, on peut étudier les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) grâce à ce qui précède.
  Si f n'est ni croissante ni décroissante
- On essaie de repèrer un intervalle I stable par I tel que $u_n \in \mathrm{I}$ à partir d'un certain rang. On peut alors se reporter à un des deux cas précédents.

Exercice 5.1

Etude des suites récurrentes (u_n) définies par

1. $u_0 \geq -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$,
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$,
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$,
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

6 Suites complexes

Définition 6.1 Suite complexe

On appelle suite complexe toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.2 Suite bornée

On dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée s'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| \leq \mathrm{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Géométriquement, cela signifie que les termes de la suite sont dans un disque de centre O et de rayon K.

Définition 6.3 Limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe (u_n) admet $l \in \mathbb{C}$ si $|u_n - l| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. La suite $(|u_n - l|)$ est réelle donc la définition a bien un sens.

Exemple 6.1

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \in \mathbb{C}$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ (sinon (u_n) est la suite nulle).

- Si $|q| > 1$, on peut seulement dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $q = e^{i\alpha}$ et (u_n) ne converge que si $\alpha \equiv 0[2\pi]$.

Attention ! Une suite complexe ne peut avoir une limite égale à $\pm\infty$. Ces symboles n'ont d'ailleurs pas de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. On peut tout au plus dire que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \bar{l}$.

Corollaire 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(l)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(l)$.

Tout ce qui a été dit sur les suites réelles reste vrai pour les suites complexes excepté ce qui est lié à la relation d'ordre, c'est-à-dire :

- les opérations sur les limites contenant $\pm\infty$,
- le théorème de passage à la limite (il contient des inégalités),
- les théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration (encore des inégalités),
- le théorème de la limite monotone et celui des suites adjacentes (la monotonie n'a pas de sens pour une suite complexe).

Par contre, le théorème de Bolzano-Weierstrass reste vrai dans le cas complexe mais la version complexe n'est pas au programme en première année.