Continuité

Exercice 1

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
4. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$.
6. $f(x,y) = x^y$.
7. $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Dérivées partielles

Exercice 2 ★★ — CCINP (ou CCP) PSI 2019

Soit la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Étudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

Exercice 3 ★★

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f.

1. $g(x,y) = f(y,x)$
2. $g(x) = f(x,x)$
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 4 ★★

Etudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.
2. $f(x,y) = |x| + |y|$.
3. $\begin{cases} f(x,y) = \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 5 ★★

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^0$? $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Exercice 6 ★★★ — Laplacien en polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de f l'application $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 7 ★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t\cos t, \ln(1+t^2))$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 8 ★★ **Une équation fonctionnelle**

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Déterminer les solutions constantes de $(*)$.

2. Soit f une solution non constamment nulle de $(*)$.

- **a.** Montrer que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.
- **b.** Montrer que f est une fonction paire.

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x,y)=f(x+y)+f(x-y)$$

- **a.** Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- **b.** Calculer les dérivées partielles secondes de F.
- **c.** On suppose que f est une solution non constamment nulle de $(*)$. Des expressions de $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $z''-\alpha z=0$.
- **d.** Donner les solutions de l'équation différentielle $z''-\alpha z=0$ suivant les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 9 ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0)=0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f.

2.
- **a.** Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
- **b.** Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f.
- **c.** La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10 ★★★★ **Centrale-Supélec MP 2016**

On note $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=y\}$.

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\setminus\Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}\end{array}\right.$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$.

2. Montrer que f est prolongeable en une application $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Montrer que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra écrire $\tilde{f}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1.

6. Justifier l'existence pour $\tilde{f}$ d'un minimum et d'un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Optimisation

Exercice 11 ★★

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y)^3+y^4\end{array}\right.$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que f admet un minimimum local mais pas global en ce point critique.

Exercice 12 ★★ **CCP PSI 2021**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extrema de f.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Expliciter des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) < 0$.
Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) > 0$.
La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local, aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$$

3. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v)$, puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

4. Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$$

Que peut-on en conclure ?

5. La fonction f possède-t-elle un ou des extrema globaux ?