

## Relations de comparaison

### Exercice 1

Trouver les limites suivantes :

$$1. x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$2. \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4} \text{ en } 0$$

### Limites via relations de comparaison

$$3. \frac{(1-\cos x^2)e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3} \text{ en } 0^+$$

$$4. \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ en } \frac{\pi}{4}$$

$$5. (\tanh x)^{\ln x} \text{ en } +\infty$$

### Exercice 2

Calculer, si elles existent, les limites de

$$1. \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \text{ en } +\infty,$$

$$2. \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ en } 0.$$

### Exercice 3

Etudier les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^2 x + \ln x}{2x - 50x^6}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 1}\right)^x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \text{ avec } 0 < a < b.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)^{x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(\tan 2x).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^2 + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

### Exercice 4

$$\text{Soit } f(x) = x \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right).$$

$$1. \text{ Démontrer que } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

$$2. \text{ En déduire la limite en } +\infty \text{ de } (e^{f(x)} - 1) \ln x.$$

$$3. \text{ Soit } g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x. \text{ Déterminer la limite de } g \text{ en } +\infty.$$

### Exercice 5

$n$  et  $p$  désignant deux entiers naturels non nuls, calculer la limite quand  $x$  tend vers 1 de

$$\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$$

**Exercice 6 ★****L'inévitable du genre**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels positifs. Etudier le comportement en  $+\infty$  de

$$f(x) = \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x.$$

**Exercice 7****Lève toi et marche !**

Lever les formes indéterminées suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - x \tan(x)}{\sin^3(x)};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

**Exercice 8**

Classer par ordre de négligeabilité les fonctions  $f : x \mapsto x \ln x$ ,  $g : x \mapsto \frac{e^x}{x}$  et  $h : x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^2$  au voisinage de  $0^+$  et  $+\infty$ .

**Exercice 9****Equivalents**

Déterminer un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

$$1. x \ln(1+x) - (x+1) \ln x \text{ en } +\infty.$$

$$6. \ln(\cos x) \text{ en } 0.$$

$$2. [x] \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ en } +\infty.$$

$$7. x \left( e^{\frac{1}{x}} - \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) \text{ en } +\infty.$$

$$3. \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} \text{ en } 0.$$

$$8. \frac{\ln(\ln x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} \text{ en } +\infty.$$

$$4. \frac{\sin x + \cos x - 1}{\tan(x - x \cos x)} \text{ en } 0.$$

$$9. e^{\sin x} - e^{\tan x} \text{ en } 0.$$

$$5. \frac{\sqrt{1 + \tan^2 x} - 1}{\tan x} \text{ en } 0.$$

$$10. \tan \left( \frac{\pi x}{2x+3} \right) \text{ en } +\infty.$$

**Exercice 10****Ailleurs qu'en 0**

Déterminer des équivalents de :

$$1. \cos x \text{ en } \frac{\pi}{2}$$

$$3. \sqrt[3]{1+x^3} - x \text{ en } +\infty$$

$$2. \tan x \text{ en } \frac{\pi}{2}$$

$$4. \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \text{ en } 1$$

**Exercice 11****Equivalents de produits et de quotients**

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes :

$$1. \frac{x \sin(x^2)}{e^x - 1} \text{ en } 0$$

$$2. \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1 - \cos x} \text{ en } 0$$

$$3. \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\tan(x) \arctan(x^3)} \text{ en } 0$$

$$4. \frac{x^2 \sin \left( \frac{1}{x^3} \right)}{e^{\frac{1}{x^2}} - 1} \text{ en } +\infty$$

**Exercice 12****Equivalents de sommes et de différences**

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes.

$$1. \sin(x) + \tan(x) \text{ en } 0$$

$$2. x^3 + e^x - 1 \text{ en } 0$$

$$3. \arcsin(x) + \cos(x) - 1 \text{ en } 0$$

$$4. \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \text{ en } +\infty$$

**Exercice 13****Un équivalent**

Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

**Exercice 14 ★**

Déterminer des équivalents simples en 0 des expressions suivantes,

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $\arccos(x) - \pi/2$ ;   | 5. $\frac{1}{1-x} - 1 + x$ ; |
| 2. $x^4 + x + x^2$ ;        |                              |
| 3. $\arcsin(x) + x + x^2$ ; | 6. $\frac{x^2}{1+x} - x$ .   |
| 4. $\arctan(x) + x$ ;       |                              |

**Exercice 15 ★★**

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) - \frac{4x + x^2}{8}.$$

**Exercice 16 ★****King size**

Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x)).$$

**Développements limités****Exercice 17****Petit joueur**Déterminer le  $DL_5(0)$  de

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 18 ★****Variations sur les DL classiques**Calculer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 des expressions suivantes :

- |                                               |                                                      |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1. $e^x \sin(x)$ et $n = 3$ ;                 | 6. $\sqrt{1+2x}$ et $n = 3$ ;                        |
| 2. $\sin^3(x) - x^3 \cos(x)$ , pour $n = 6$ ; | 7. $\sqrt{4-x}$ et $n = 3$ ;                         |
| 3. $x^3 \sqrt{1+x}$ et $n = 5$ ;              | 8. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ et $n = 3$ ; |
| 4. $\frac{1}{2+x}$ et $n = 3$ ;               | 9. $\ln(2+x)$ et $n = 3$ ;                           |
| 5. $\frac{1}{3-x^2}$ et $n = 5$ ;             | 10. $\exp(3-x)$ et $n = 3$ ;                         |
|                                               | 11. $(1+x)^{1/x}$ et $n = 2$ .                       |

**Exercice 19 ★****DL d'une bijection réciproque**On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]-1, 1[$  par

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f(x)$  au voisinage de 0.
- Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  qu'on explicitera.
- En admettant qu'il existe, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f^{-1}(x)$  au voisinage de 0.

**Exercice 20 ★****Au-delà de zéro...***Développements en vrac.*

1. Calculer les développements limités à l'ordre 4 des expressions suivantes au voisinage de  $x_0$  :

a.  $e^x, x_0 = 1$ ;

b.  $\cos(x), x_0 = \pi/4$ ;

c.  $\sin(x), x_0 = \pi/6$ ;

d.  $\ln(x), x_0 = e$ ;

e.  $\frac{1}{1+x^2}, x_0 = 1$ ;

f.  $\arctan(x), x_0 = 1$ ;

g.  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, x_0 = +\infty$ ;

h.  $(\tan(x))^{\tan(2x)}, x_0 = \pi/4$ ;

2. Calculer les développements limités

- a. à l'ordre 3 au voisinage de  $+\infty$  de

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2};$$

- b. à l'ordre 2 au voisinage de  $\pi/4$  de

$$\cos(x) + \sin(x);$$

- c. à l'ordre 2 au voisinage de  $\pi/4$  de  $\tan(x)$ .

**Exercice 21 ★****Spanish torture**Déterminer le  $DL_4(0)$  de

$$f(x) = x(\operatorname{ch}(x))^{1/x}.$$

**Exercice 22 ★****Dead again**Déterminer le  $DL_2(0)$  de la fonction  $g$  définie par

$$g : x \mapsto (1 + \arctan(x)) \frac{x}{\sin^2(x)}.$$

**Exercice 23****Attention à la constante**Déterminer le  $DL_3(0)$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f : x \mapsto \ln(3e^x + e^{-x}).$$

**Exercice 24****Petit piège**Déterminer le  $DL_4(0)$  de la fonction définie par,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

**Exercice 25****Easy**

Chercher un développement limité d'ordre 5 de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{1+x}.$$

**Exercice 26**Déterminer un  $DL_4(0)$  des expressions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$ ;

3.  $h(x) = e^{\cos(x)}$ ;

2.  $g(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$ ;

4.  $i(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$ .

**Exercice 27**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln \left( \sum_{k=0}^n x^k \right)$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right)$$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2/2} dt$$

**Exercice 28**

Chercher trois termes du développement asymptotique de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 29**

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ .

2. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

**Exercice 30**

ENSEA

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $\cos x = nx$  possède une unique solution  $x_n \in [0, 1]$ .
- Déterminer la limite de  $(x_n)$ .
- Etudier la monotonie de  $(x_n)$ .
- Etablir que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
- Déterminer un équivalent de  $x_n - \frac{1}{n}$ .

**Exercice 31**

- Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , l'équation  $x = \ln x + n$  admet deux solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On note  $x_n$  la plus petite et  $y_n$  la plus grande de ces deux solutions.
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .
  - Montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ .
  - On pose  $u_n = x_n - e^{-n}$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n}$ .
  - Déterminer un équivalent simple de  $u_n - e^{-2n}$ .
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ .
  - Montrer que  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ .
  - On pose  $v_n = y_n - n$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .
  - Déterminer un équivalent simple de  $v_n - \ln n$ .

**Exercice 32**

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

## Allures locales

### Exercice 33

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ . Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Montrer que  $f$  est continue en 0.
2.  $f$  est-elle dérivable en 0?
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Etudier les variations de  $f$ .
5. Etudier les branches infinies de  $\mathcal{C}$ .
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $f$ .
7. Préciser l'équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de  $T$  et  $\mathcal{C}$  au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer  $\mathcal{C}$  avec soin. On placera notamment la tangente  $T$  déterminée à la question précédente.

### Exercice 34

Soit  $f : x \mapsto xe^x$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur un ensemble à déterminer.
2. Déterminer le développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Donner un équivalent simple de  $f^{-1}$  en  $+\infty$ .

### Exercice 35 ★

### Une étude locale

On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction  $f$  définie par l'expression

$$\frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?
2. Prouver que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  ce prolongement.
3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0?
4. Étudier la position relative du graphe de  $f$  et de sa tangente au voisinage de l'origine.

### Exercice 36

### Asymptote

Soit  $f$  la fonction définie par

$$x \mapsto (1+x)e^{1/x}.$$

Etudier les branches infinies de  $f$  et déterminer la position des asymptotes par rapport à la courbe.

### Exercice 37

Démontrer que la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

a pour asymptote la droite d'équation  $y = 2x$  en  $+\infty$ .

### Exercice 38

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + xe^{\frac{1}{x}}}$ .

## Formules de Taylor

**Exercice 39****Approximations de  $f''$** 

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Déterminer la limite en 0 de

$$\tau : h \mapsto \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

**Exercice 40 ★****La dérivée symétrique**

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet *une dérivée symétrique* en  $a \in \mathbb{R}$  lorsque le rapport

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$

admet une limite lorsque  $h$  tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en  $a$  est *une condition suffisante* de dérivabilité symétrique en  $a$ .
2. Est-ce une condition nécessaire ?

**Suites d'intégrales****Exercice 41****CCP PC**

On pose  $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$ . Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 42**

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$   $u_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  converge et donner sa limite.
2. À l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$ .