Dérivabilité

Théorème de Rolle

Exercice 1 ★

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant une limite ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Prouver l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a, b]$, n fois dérivable sur $]a, b[$. Soient

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$$

et supposons que

$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n).$$

Montrer qu'il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 3 ★★★ **Centrale MP**

Soient f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, A et B deux points distincts de sa courbe représentative $\mathcal{C}$ tels que B est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}$, distinct de A, tel que A est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en M.

Théorème des accroissements finis

Exercice 4 ★

Etudier la limite en $+\infty$ de l'expression

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 5 ★★ **Règle de l'Hôpital**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in$ I, f et g deux fonctions définies et continues sur I, dérivables sur I $\setminus \{x_0\}$ telles que $\forall x \in$ I $\setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ et telles que le rapport

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tende vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ lorsque x tend vers x_0. Montrer que le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

est défini pour tout $x \neq x_0$ et qu'il tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.
Le résultat démontré s'appelle la *règle de l'Hospital*.

3. Retrouver, en utilisant la règle de l'Hospital, les développements limités suivants au point 0,

$$\sin(x) = x + o(x), \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 6 ★

En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$;
2. $\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 7 ★

Démontrer que :

1. $\forall\, 0 < x < 1, \quad \arcsin(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

2. $\forall\, x > 0, \quad \arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 8 ★★ **Théorème de Darboux**

Soit f, une application dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. *On ne suppose pas que la dérivée f' est continue sur* $[a,b]$.

1. On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } a < x \leqslant b. \end{cases}$$

   et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b, \\ \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } a \leqslant x < b. \end{cases}$$

   Démontrer que ϕ et ψ sont continues sur $[a,b]$.

2. Démontrer que l'application dérivée f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

Variations

Exercice 9 ★★

Soient p et q, deux nombres réels et n, un entier strictement positif. Démontrer que le polynôme $\mathrm{X}^n + p\mathrm{X} + q$ ne peut avoir plus de trois racines réelles distinctes.

Exercice 10 ★★ **X PC 2012**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.

Exercice 11 ★★ **Théorème de Darboux**

Soit f une application dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On ne suppose pas que la dérivée f' est continue. On va cependant montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soit y un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On souhaite donc montrer que f' prend la valeur y sur l'intervalle $]a,b[$. Pour simplifier, on supposera dans un premier temps $f'(a) < f'(b)$.

1. On pose $g(x) = f(x) - xy$ pour $x \in [a,b]$. Justifier que g admet un minimum sur $[a,b]$.

2. Montrer que ce minimum ne peut être atteint ni en a ni en b.

3. Conclure.

4. Traiter le cas où $f'(a) > f'(b)$.

Exercice 12 ★

Soit f, une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que $f(0) = 0$ et vérifiant

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad f'(x) \leqslant f(x).$$

En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$, démontrer que la fonction f est identiquement nulle.

Equations fonctionnelles

Exercice 13 ★★ **Equation fonctionnelle du logarithme**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

Exercice 14 ★★

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Exercice 15 ★★ **Une équation fonctionnelle**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(2x) = 2f(x).$$

Dérivées successives

Exercice 16 ★ **Autour de Leibniz**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n(x) = x^{n-1}e^{1/x}$$

On pose $g_n = f_n^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de g_n et prouver que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_{n+1}(x) = xg_n'(x) + (n+1)g_n(x)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}$$

Exercice 17 ★

Calculer la dérivée n-ième de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (x^2+1)e^x$.

Exercice 18 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(\mathrm{E}) :\qquad y' - (nx-1)y = 0$$

1. Résoudre (E) et déterminer la solution f_n telle que $f_n(0) = 1$.
2. Trouver l'extremum de cette fonction. On note (u_n, v_n) les coordonnées du point correspondant sur le graphe de f_n.
3. Déterminer les limites u et v des suites (u_n) et (v_n) et donner un équivalent de $v_n - v$.
4. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $f_n^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Exercice 19 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{P}_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 ★★★ **Zéros entrelacés**

1. Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $p \leq q$ sur $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $u'' + pu = 0$ et $v'' + qv = 0$. On suppose que u s'annule en des réels a et b avec $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$.
   - **a.** On pose $\mathrm{W} = u'v - uv'$. Déterminer W'.
   - **b.** En déduire que v s'annule sur $[a, b]$.
2. Application. Soient r une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + rf = 0$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$.
   - **a.** On suppose $r \geq \mathrm{M}^2$. Montrer que tout intervalle fermé de longueur $\dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$ contient au moins un zéro de f.
   - **b.** On suppose $r \leq \mathrm{M}^2$. On suppose que f s'annule en des réels a et b tels que $a < b$ mais qu'elle ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que $b - a \geq \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$.

Formules de Taylor

Exercice 21 ★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que $f(0) = 1$ et $\forall x \geq \dfrac{1}{2}, f(x) = 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{\mathbb{R}_+} \left|f^{(n)}\right| \geq 2^n n!$.
2. Montrer que pour $n \geq 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$.

Exercice 22 ★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. On suppose de plus que :

$$\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n)}\right| \leq \lambda^n n!$$

Montrer que f est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}; \dfrac{1}{\lambda}\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 ★★ **Formule de Taylor-Lagrange**

Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \mathrm{A}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec une constante A bien choisie.

Exercice 24 ★★

On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer par récurrence une expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que $|u_n - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence et la limite de (u_n).

Exercice 25 ★★ **Inégalité de Hadamard**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f, f' et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose

$$\mathrm{M}_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \qquad \mathrm{M}_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \qquad \mathrm{M}_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|$$

On souhaite montrer que $\mathrm{M}_1 \leq 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où $\mathrm{M}_0 = 0$ ou $\mathrm{M}_2 = 0$. Dans la suite de l'énoncé on supposera M_0 et M_2 strictement positifs.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Justifier que
$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2}$$
3. En déduire que
$$|f'(x)| \leq \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{\mathrm{M}_2 h}{2}$$
4. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a}{t} + bt$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que g admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer celui-ci en fonction de a et b.
5. Conclure.

Exercice 26 ★★★ **Fonctions absolument monotones**

Soient $\mathrm{R} > 0$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\mathrm{I} =]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathrm{I}, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $\mathrm{R}_n(x) = f(x) - \mathrm{S}_n(x)$.

1. Soit $r \in]0, \mathrm{R}[$ et $x \in]-r, r[$. Montrer que $|\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \mathrm{R}_n(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 27 ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ nulle en 0. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Etudier la limite de (S_n). On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 28 ★ **La dérivée symétrique**

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *une dérivée symétrique* en $a \in \mathbb{R}$ lorsque le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

admet une limite lorsque h tend vers 0.

1. Prouver que la dérivabilité en a est *une condition suffisante* de dérivabilité symétrique en a.
2. Est-ce une condition nécessaire ?

Exercice 29 ★ **Approximations de f''**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite en 0 du quotient

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Exercice 30 ★ **L'exponentielle comme série entière**

Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Exercice 31 ★

Etablir que

$$\forall x \leqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Polynômes

Exercice 32 ★★

Soit P un polynome réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de P' sont aussi réelles et simples.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, les racines de $P^2 + \alpha$ sont simples.

Exercice 33 ★★

Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur $I =]-1, 1[$ *par*

$$f : x \in I \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que , pout tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n-ème s'écrit
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$
où P_n est un polynôme réel.
2. Montrer que le monôme de plus haut degré de P_n est $n!x^n$.
3. Prouver que $\forall x \in I$:
$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$
4. Prouver , en utilisant la formule de Leibniz , que pour tout $n \geqslant 1$ et $\forall x \in I$,
$$P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + n^2(1-x^2)P_{n-1}(x).$$
5. En déduire la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ *(On distinguera les cas n pair et n impair et on exprimera le résultat sous la forme d'un quotient de factorielles).*
6. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I$,
$$P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x).$$
7. En déduire une technique de calcul des polynômes P_n. A titre d'exemple , expliciter $f^{(5)}(x)$ pour tout x réel.

Exercice 34 ★★ **Formule de Vandermonde**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et P_n la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto P_n(x) = (x-a)^n(x-b)^n.$$

1. Calculer à l'aide de la formule de Leibniz $P_n^{(n)}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer d'une autre manière $P_n^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $a = b$.
3. En déduire la formule de Vandermonde
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 35 ★★

Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$.
2. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n.
3. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $-\infty$ et $+\infty$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n sont réelles et simples. Raisonner par récurrence en utilisant le théorème de Rolle.

Exercice 36 ★★ **Une suite de polynômes**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soit n un entier naturel. On pose

$$P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

a. Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x).$$

b. Etablir que P_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

3. Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

a. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(1/x + a - 1) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

b. Montrer que G' s'annule en un point de $]0, 1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a, +\infty[$.

4. Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty, a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, a[$, telle que

$$h(a) = 0 \text{ et telle que } \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$$

Montrer que la fonction h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty, a[$.

5. Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 37 ★★

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 38 ★★ **D'après CCP PC 2007**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n n!}Q_n^{(n)}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Quel est le degré de P_n ?
3. Montrer que P_n a la parité de n. En déduire $P_n(0)$ pour n impair et $P_n'(0)$ pour n pair.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $P_n(0)$ pour n pair et $P_n'(0)$ pour n impair. On exprimera les résultats à l'aide de factorielles.
5. **a.** Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)Q_n' = 2nXQ_n$$

b. En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n$$

6. **a.** Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b. En appliquant le théorème de Rolle et à l'aide d'une récurrence, montrer que P_n admet exactement n racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.

Etude de suites

Exercice 39 ★

Étudier la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Exercice 40 ★

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}.$$

Exercice 41 ★★

Étudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) + 1.$$

Divers

Exercice 42 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 ★

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes. *On précisera systématiquement sur quelle partie de $\mathbb{R}$ ces fonctions sont dérivables.*

1. $f(x) = \ln(\ln(x))$;
2. $f(x) = \arctan(\ln(x))$;
3. $f(x) = \ln(\sqrt{1 - 2\sin^2(x)})$;
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x) + x\sin(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$;
5. $f(x) = \left(\cos^2(x) + \dfrac{3}{2}\right)\sin(2x)$;
6. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

Exercice 44 ★★

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ($n \geqslant 1$).

1. On suppose dans cette question que $n = 1$ et que f admet une limite finie en $+\infty$. Prouver à l'aide d'un contre-exemple que f' peut n'admettre aucune limite en $+\infty$.
2. On suppose que
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty.$$
Etablir que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
3. L'entier n est désormais quelconque. On suppose que f et $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$. Etablir que
$$\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$