

# DÉTERMINANTS

## Groupe symétrique

### Solution 1

1. Posons  $c_1 = (i, i+1, \dots, j-1, j)$ ,  $c_2 = (j-1, j-2, \dots, i+1, i)$  et  $\sigma = c_1 \circ c_2$ .

- Si  $k \notin \llbracket i, j \rrbracket$ ,  $\sigma(k) = k$ .
- Si  $k \in \llbracket i+1, j-1 \rrbracket$ ,  $c_2(k) = k-1 \in \llbracket i, j-2 \rrbracket$  et donc  $c_1(k-1) = k-1+1 = k$ , d'où  $\sigma(k) = k$ .
- $c_2(i) = j-1$  et  $c_1(j-1) = j$  donc  $\sigma(i) = j$ .
- $c_2(j) = j$  et  $c_1(j) = i$  donc  $\sigma(j) = i$ .

On en déduit que  $\sigma = (i, j)$ .

2. Soit  $(i, j)$  une transposition de  $S_n$ . On peut supposer  $i < j$ .  $(i, j)$  peut alors s'écrire comme un produit de deux cycles d'après la question précédente.

$$(i, j) = (i, i+1, \dots, j-1, j)(j-1, j-2, \dots, i+1, i)$$

Or il est simple de décomposer chacun de ces deux cycles comme un produit de transpositions de la forme  $(k, k+1)$

$$\begin{aligned} (i, i+1, \dots, j-1, j) &= (i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1)(j-1, j) \\ (j-1, j-2, \dots, i+1, i) &= (j-1, j-2)(j-2, j-3) \dots (i+2, i+1)(i+1, i) \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions.

### Solution 2

Soit  $(i, j)$  une transposition. Si  $i = 1$  ou  $j = 1$ , la transposition  $(i, j)$  est bien du type de l'énoncé. Sinon, on a  $(i, j) = (1, j)(1, i)(1, j)$ . Comme toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions et que toute transposition s'écrit comme un produit de transpositions du type  $(1, i)$ , toute permutation s'écrit bien comme un produit de transpositions du type  $(1, i)$ .

### Solution 3

#### Première méthode :

On peut déterminer le nombre d'inversions : il suffit de compter pour chaque élément de la seconde ligne le nombre d'éléments qui le suivent et qui lui sont inférieurs. On trouve

$$I(\sigma) = n-1 + n-2 + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

#### Seconde méthode :

On peut décomposer  $\sigma$  en produit de cycles disjoints (en fait de transpositions).

- Si  $n$  est pair

$$\sigma = (1, n) \circ (2, n-1) \circ \dots \circ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right)$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

- Si  $n$  est impair

$$\sigma = (1, n) \circ (2, n-1) \circ \dots \circ \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

**Solution 4**

Comme  $S_2 = \{\text{Id}_{\llbracket 1,2 \rrbracket}, (1, 2)\}$ , le centre de  $S_2$  est évidemment  $S_2$ .

Supposons  $n \geq 3$ . Tout d'abord  $\text{Id}_{\llbracket 1,n \rrbracket}$  appartient évidemment au centre de  $S_n$ . Soit maintenant  $\sigma$  appartenant au centre de  $S_n$ .  $\sigma$  commute notamment avec toutes les transpositions. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soient également deux éléments  $j$  et  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i, j, k$  soient distincts deux à deux (c'est possible puisque  $n \geq 3$ ). Comme  $\sigma$  commute avec  $(i, j)$ ,  $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (i, j)$  i.e.  $(\sigma(i), \sigma(j)) = (i, j)$ . Ainsi  $\sigma(i) \in \{i, j\}$ . On montre de même que  $\sigma(i) \in \{i, k\}$ . Comme  $j$  et  $k$  sont distincts, on a nécessairement  $\sigma(i) = i$ . Finalement  $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1,n \rrbracket}$ .

On en déduit que le centre de  $S_n$  est le sous-groupe trivial  $\{\text{Id}_{\llbracket 1,n \rrbracket}\}$  pour  $n \geq 3$ .

**Solution 5**

Posons  $M_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . D'après le théorème de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n k\sigma(k) \leq \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \sigma(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M_n$$

Or  $f(\text{Id}_{\llbracket 1,n \rrbracket}) = M_n$  donc  $M_n$  est le maximum de  $f$  sur  $S_n$ .

Soit  $\sigma \in S_n$  non décroissante. Alors il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $\sigma(i) < \sigma(j)$ . Soit  $\tau$  la transposition de  $S_n$  échangeant  $\sigma(i)$  et  $\sigma(j)$  et posons  $\sigma' = \tau \circ \sigma$ . Alors

$$f(\sigma') - f(\sigma) = i\sigma(j) + j\sigma(i) - i\sigma(i) - j\sigma(j) = (j - i)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0$$

Ainsi le minimum de  $f$  est atteint en la seule permutation décroissante de  $S_n$ , à savoir la permutation qui à  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  associe  $n + 1 - k$ . Le minimum de  $f$  sur  $S_n$  vaut donc

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

**REMARQUE.** On aurait aussi pu utiliser un argument de monotonie au lieu du théorème de Cauchy-Schwarz pour déterminer le maximum de  $f$ .

**Solution 6**

1. Soit  $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Alors

$$(P_\sigma P_\tau)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (P_\sigma)_{i,k} (P_\tau)_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(i),k} \delta_{k,\tau(j)}$$

Cette somme est non nulle si et seulement si  $\sigma^{-1}(i) = \tau(j)$  i.e.  $i = \sigma \circ \tau(j)$  et dans ce cas elle vaut 1. Ainsi

$$(P_\sigma P_\tau)_{i,j} = \delta_{i,\sigma\tau(j)} = (P_{\sigma\tau})_{i,j}$$

Il s'ensuit que  $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$ . On en déduit que  $P$  est bien à valeurs dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  puisque pour  $\sigma \in S_n$ ,  $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\text{Id}} = I_n$  puis que  $P$  est bien un morphisme de  $S_n$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

2. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

$$(P_\sigma^\top)_{i,j} = (P_\sigma)_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = (P_{\sigma^{-1}})_{i,j}$$

et donc  $P_\sigma^\top = P_{\sigma^{-1}}$ .

3. Soit  $\tau = (i, j)$  une transposition de  $S_n$ . Alors l'échange des colonnes (ou lignes)  $i$  et  $j$  transforment la matrice  $P_\tau$  en la matrice  $I_n$ . On en déduit que  $\det(P_\tau) = -1 = \varepsilon(\tau)$ . On conclut en remarquant que les transpositions engendrent  $S_n$ .

**Petits déterminants****Solution 7**

1. Effectuons l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ,

$$\Delta_1 = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix},$$

puis  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ ,  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ,

$$\Delta_1 = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix},$$

le système étant triangulaire,

$$\Delta_1 = (a+2)(a-1)^2.$$

2. Effectuons l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ,

$$\Delta_2 = (x+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix},$$

puis  $C_2 \leftarrow C_2 - aC_1$ ,  $C_3 \leftarrow C_3 - aC_1$ ,

$$\Delta_2 = (2a+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 \\ 1 & 0 & x-a \end{vmatrix},$$

le système étant triangulaire,

$$\Delta_2 = (2a+x)(x-a)^2.$$

### Solution 8

Effectuons l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ,

$$\Delta = (1 + \omega + \omega^2) \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega & 1 \end{vmatrix}.$$

► Cas 1 :  $\omega = 1$ . Les trois colonnes de  $\Delta$  sont identiques, donc  $\Delta = 0$ .

► Cas 2 :  $\omega = j$  ou  $j^2$ . Dans ce cas  $\Delta = 0$  car

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

### Solution 9

1. Une simple application de la règle de Sarrus aboutit à

$$\Delta_1 = 2abc.$$

2. Effectuons les opérations  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ ,  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ,

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix},$$

puis en développant par rapport à la première ligne,

$$\Delta_2 = (c-b)(c-a)(b-a).$$

3. On remarque que les lignes du déterminant sont *liées* par la relation

$$L_3 = (a + b + c)L_1 - L_2.$$

On a donc  $\Delta_3 = 0$ .

4. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

On a

$$M\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & j\beta & j^2\gamma \\ \alpha & j^2\beta & j\gamma \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = a + b + c, \quad \beta = a + jb + j^2c$$

et

$$\gamma = a + j^2b + jc.$$

On a donc

$$\det(M\Omega) = \det(M) \det(\Omega) = \alpha\beta\gamma \det(\Omega).$$

D'après le calcul de  $\Delta_2$ ,

$$\det(\Omega) = (j^2 - j)(j^2 - 1)(j - 1) \neq 0,$$

on a donc

$$\Delta_4 = \det(M) = \alpha\beta\gamma.$$

5. Notons

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant s'écrit en colonnes ,

$$\Delta_5 = |A + B, B + C, A + C|.$$

En développant par trilinearité ce déterminant , on obtient 8 termes dont 6 sont nuls par le caractère alterné du déterminant. On a

$$\Delta_5 = |A, B, C| + |B, C, A|.$$

Or , par antisymétrie ,

$$|B, C, A| = |A, B, C|$$

ainsi

$$\Delta_5 = 2|A, B, C|.$$

Or,

$$|A, B, C| = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

On a donc

$$\Delta_5 = 2abc\Delta_2,$$

d'où

$$\Delta_5 = 2abc(c - b)(c - a)(b - a).$$

**Solution 10**

1. Par  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k = 2, 3$  et 4, développement par rapport à la première colonne puis factorisation, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a' - a & 0 & b(a' - a) \\ 0 & 0 & b' - b & a(b' - b) \\ 0 & a' - a & b' - b & a'b' - ab \end{vmatrix} \\ &= (a' - a)(b' - b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ a' - a & b' - b & a'b' - ab \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En effectuant  $L_3 \leftarrow L_3 + (a - a')L_1$  puis une factorisation, on obtient :

$$\Delta_1 = (a' - a)(b' - b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a' \end{vmatrix}.$$

On trouve finalement, après développement par rapport à première colonne :

$$\Delta_1 = (a' - a)(b' - b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{vmatrix} = (a' - a)^2(b' - b)^2.$$

2. En effectuant  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k = 2, 3$  et 4, puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Puis par  $L_k \leftarrow L_k - 2L_2$  pour  $k = 3$  et 4, on aboutit à :

$$\Delta_2 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix},$$

et en développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

3. Par  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$  puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Par  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k = 1$  et 2 puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\Delta_3 = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

4. Par  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ , on obtient :

$$\Delta_4 = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En effectuant alors  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k = 2, 3$  et  $4$ , on aboutit à :

$$\Delta_4 = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

## Gros déterminants

### Solution 11

Pour tout  $x$  réel, notons

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

D'après la formule développée du déterminant (ou par récurrence sur  $n$  au moyen d'un développement par rapport à la dernière colonne),  $P$  est une fonction polynôme de degré au plus  $n$ . Comme on a clairement

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(k) = 0,$$

il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \lambda \prod_{k=1}^n (x - k).$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on s'aperçoit que le monôme en  $x^n$  de  $P(x)$  provient du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & 2 & \cdots & n \\ 1 & x & & \vdots \\ 1 & 2 & \ddots & n \\ 1 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

et vaut donc  $x^n$ . Ainsi  $\lambda = 1$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \prod_{k=1}^n (x - k).$$

### Solution 12

► Si  $n = 1$ , le déterminant vaut clairement

$$\sin(2a_1).$$

► Si  $n = 2$ , on trouve

$$-\sin^2(a_1 - a_2).$$

► Si  $n \geq 3$ , notons  $M = (\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  et

$$C = \begin{bmatrix} \cos(a_1) \\ \vdots \\ \cos(a_n) \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} \sin(a_1) \\ \vdots \\ \sin(a_n) \end{bmatrix}.$$

D'après la formule d'addition du sinus, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ , la  $j$ -ième colonne de  $M$  vaut

$$\cos(a_j)S + \sin(a_j)C.$$

Ainsi

$$\text{Im}(M) \subset \text{vect}(C, S)$$

et donc  $\text{rg}(M) \leq 2 < n$ , d'où  $\det(M) = 0$ .

### Solution 13

Notons, pour tout  $x$  réel :

$$P(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & \dots & \dots & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

En développant  $P(x)$  par rapport à la première colonne, on obtient que  $P$  est une fonction polynôme de degré au plus  $k$  :  $P$  est donc de degré strictement inférieur à  $n-1$ . Comme il est clair que

$$\forall 1 \leq k \leq n-1, P(k) = 0,$$

la fonction  $P$  admet strictement plus de racines que son degré : on en conclut qu'elle est nulle.

### Solution 14

En développant  $\Delta_n = \det(A_n)$  par rapport à la première colonne, on aboutit à :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} \Delta_{n-1},$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^n (-1)^{k+1} = (-1)^{2+3+\dots+(n+1)} = (-1)^{n(n+3)/2}$$

### Solution 15

Effectuons successivement les opérations  $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$  pour  $k$  variant de  $n$  à 2 :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

### Solution 16

1. En effectuant les opérations  $C_k \leftarrow C_k - C_1$  sur les colonnes de  $\det(A + xJ)$  pour  $k$  variant de 2 à  $n$ , on obtient que  $\det(A + xJ)$  est égal à un déterminant dont les seuls coefficients dépendant de  $x$  sont ceux de la première colonne et sont de la forme  $a_i + xb_i$ . En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient que  $\det(A + xJ)$  est une combinaison linéaire de fonctions affines de la variable  $x$  : il s'agit donc d'une fonction affine de  $x$ .

2. a. On sait que  $\det(A + xJ) = \alpha x + \beta$ . Avec  $x = -a$  et  $x = -b$ , on trouve deux équations qui donnent :

$$\alpha = \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{b-a},$$

$$\beta = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

On en déduit  $\det(A)$  avec  $x = 0$  :

$$\det(A) = \beta = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

- b. En appliquant la formule développée du déterminant, on remarque que  $\det(A)$  est une expression polynomiale en  $(a, b)$ . En tant que telle, elle est continue (à  $a$  fixé) par rapport à  $b$ . En particulier :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a} \\ &= (c-a)^n + na(c-a)^{n-1}\end{aligned}$$

car

$$\frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}$$

est le taux d'accroissement en  $a$  de la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto f(x) = x(c-a)^n - a(c-x)^n$$

et que

$$f'(a) = (c-a)^n + na(c-a)^{n-1}.$$

### Solution 17

Effectuons  $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$  et factorisons :

$$D_n(x) = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a \\ 1 & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Par les opérations  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k = 2, 3, \dots, n$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned}D_n(x) &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & x-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}.\end{aligned}$$

### Solution 18

Effectuons  $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ . On trouve

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

Puis, par les opérations  $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$  pour  $k$  variant de  $n$  à 2 :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1-n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons alors par rapport à la première colonne :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1-n & \ddots & & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n & 1 \end{vmatrix}.$$



Puis en effectuant  $L_k \leftarrow L_k - L_1$  pour  $k$  variant de 2 à  $n$  :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -n & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n (-n)^{n-2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

### Solution 19

Notons  $D_{n,p}$  le déterminant cherché. Supposons  $p \geq 1$ . On note  $L_0, L_1, \dots, L_p$  les lignes de la matrice et on effectue les opérations :

$$\begin{aligned} L_p &\leftarrow L_p - L_{p-1} \\ L_{p-1} &\leftarrow L_{p-1} - L_{p-2} \\ &\vdots \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_1 &\leftarrow L_1 - L_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n,p} &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \\ &= D_{n,p-1} \end{aligned}$$

en développant par rapport à la première colonne. Par récurrence,  $D_{n,p} = D_{n,0} = 1$ .

### Solution 20

Notons  $D_n(a, b)$  le déterminant à calculer. On note  $C_1, \dots, C_n$  (resp.  $L_1, \dots, L_n$ ) les colonnes (resp. les lignes de la matrice). On effectue l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$  :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b \\ b-a & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération  $L_n \leftarrow L_n + L_1$  :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & \ddots & b \\ 0 & 2b & \dots & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

On suppose maintenant  $a \neq 0$  et on effectue l'opération  $L_n \leftarrow L_n - \frac{2b}{a}(L_2 + L_3 + \dots + L_{n-1})$  :

$$\begin{vmatrix} a-b & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a & & & b \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & & & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a^2+ab-(n-2)b^2}{a} \end{vmatrix}$$

Par conséquent,

$$D_n(a, b) = (a-b)a^{n-3}(a^2 + ab - (n-2)b^2)$$

si  $a \neq 0$ .

Étudions maintenant le cas  $a = 0$ . Remarquons que si  $n \geq 4$  alors la matrice comporte au moins deux fois la ligne  $(b, 0, \dots, 0, b)$  donc le déterminant est nul. Par ailleurs, un rapide calcul donne  $D_2(0, b) = -b^2$  et  $D_3(0, b) = 2b^2$ . La formule précédente reste vraie pour  $n \geq 3$ . Finalement,

$$D_n(a, b) = \begin{cases} -b^2 & \text{si } a = 0 \text{ et } n = 2 \\ (a-b)a^{n-3}(a^2 + ab - (n-2)b^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

## Solution 21

On effectue les opérations  $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$  pour  $k$  variant de  $n$  à  $2$  :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$  :

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (1) & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$



**Solution 25**

Remarquons tout d'abord que si deux des  $a_i$  sont égaux, le déterminant définissant  $D(x)$  admet deux colonnes identiques, il est donc nul. On supposera donc par la suite les  $a_i$  distincts deux à deux.

Remarquons que  $\frac{P(x)}{x - a_i} = \prod_{j \neq i} (x - a_j)$  est polynomiale en  $x$  de degré  $n - 1$ . En développant le déterminant par rapport à la première ligne,

on voit que  $D$  est polynomiale en  $x$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  (on peut notamment la prolonger par continuité en les  $a_i$ ).

Pour  $1 \leq i \leq n$ , notons  $\Delta_i$  le déterminant de Vandermonde des complexes  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ . On a donc  $\Delta_i = \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j)$ .

On va calculer  $D(a_i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . La première ligne du déterminant définissant  $D(a_i)$  a tous ses coefficients nuls hormis le  $i^{\text{ème}}$  qui vaut  $\prod_{j \neq i} (a_j - a_i)$ . En développant par rapport à cette ligne, on a donc :

$$\begin{aligned} D(a_i) &= \left( (-1)^{i-1} \prod_{j \neq i} (a_j - a_i) \right) \Delta_i = \left( (-1)^{i-1} \prod_{j < i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{j > i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \\ &= \left( \prod_{j < i} (a_i - a_j) \right) \left( \prod_{j > i} (a_j - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \\ &= \left( \prod_{j < i} (a_i - a_j) \right) \left( \prod_{i < k} (a_k - a_i) \right) \left( \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_k - a_j) \right) \end{aligned}$$

On peut partitionner l'ensemble  $\{(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid j < k\}$  en 3 parties suivant que  $j \neq i$  et  $k \neq i$  ou bien  $j = i$  et  $k > i$  ou bien  $k = i$  et  $j < i$ . On a donc

$$D(a_i) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)$$

Autrement dit  $D(a_i) = \delta$  pour  $1 \leq i \leq n$  où  $\delta$  représente le déterminant de Vandermonde de  $a_1, \dots, a_n$ . Le polynôme  $D - \delta$  est donc de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  et admet  $n$  racines distinctes (les  $a_i$  sont supposés distincts deux à deux) : il est donc nul. On a donc  $D(x) = \delta$  pour tout  $x \in \mathbb{C}$ .

**Solution 26**

1. Comme  $\deg P = n$ ,  $P$  admet  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$  comptées avec multiplicité. Il suffit donc de montrer que toutes ces racines sont simples. Supposons que  $z$  soit une racine multiple de  $P$ . On a donc  $P(z) = 0$  et  $P'(z) = 0$  i.e.  $z^n - z + 1 = 0$  et  $nz^{n-1} - 1 = 0$ . En utilisant la deuxième équation, on obtient  $z^n = \frac{z}{n}$ . Puis en reportant dans la première, on obtient  $z \left( \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 = 0$ . On trouve donc  $z = \frac{n}{n-1}$ .

Puisque  $nz^{n-1} - 1 = 0$ , on a  $\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = 1$ , ce qui est impossible car  $\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} > 1$ .

Par conséquent, toutes les racines de  $P$  sont simples et  $P$  admet donc  $n$  racines distinctes.

2. On définit les vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  suivants :  $U = (1, \dots, 1)$  et  $Z_j = (\delta_{ij} z_i)_{1 \leq i \leq n}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Si on note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , on a  $\det A = \det_{\mathcal{B}}(U + Z_1, \dots, U + Z_n)$ . En développant ce déterminant par multilinéarité, on obtient une somme de  $2^n$  termes dont tous ceux qui comportent plus d'une fois le vecteur  $U$  sont nuls. Il reste :

$$\det_{\mathcal{B}}(U + Z_1, \dots, U + Z_n) = \det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_n) + \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(Z_1, \dots, Z_{j-1}, U, Z_{j+1}, \dots, Z_n)$$



Par conséquent

$$D_n = F(a_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n) \prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} D_{n-1}$$

On montre alors par récurrence que :

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

### Solution 28

#### Première méthode :

Pour  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , note  $V_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$  le déterminant de l'énoncé.

Supposons  $n \geq 1$  et fixons  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $P(x) = V_n(x_0, \dots, x_{n-1}, x)$ . En développant le déterminant correspondant par rapport à la première colonne, on voit que  $P$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $n$  et que le coefficient du monôme de degré  $n$  est  $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$ . Supposons dans un premier temps les complexes  $x_0, \dots, x_{n-1}$  distincts deux à deux. Ce sont tous des racines de  $P$  puisqu'en remplaçant  $x$  par un de ces complexes dans le déterminant définissant  $P(x)$ , on obtient deux lignes identiques et donc un déterminant nul. On en déduit que

$$P(x) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Finalement

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = P(x_n) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$$

L'égalité est encore valable lorsque deux des complexes parmi  $x_0, \dots, x_{n-1}$  sont égaux puisque dans ce cas  $V_n(x_0, \dots, x_n) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$  (deux lignes sont égales dans chacun de ces déterminants).

On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(n) : \quad \forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad V_n(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$\text{HR}(0)$  est vraie puisque pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $V_0(x_0) = 1$ . Il suffit de convenir classiquement qu'un produit indéxé sur l'ensemble vide vaut 1. Supposons  $\text{HR}(n-1)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} V_n(x_0, \dots, x_n) &= V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \\ &= \left( \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \right) \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{HR}(n)$  est vraie.

Par récurrence,  $\text{HR}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Seconde méthode :

On reprend les mêmes notations que précédemment. Supposons  $n \geq 1$ . On note  $C_0, \dots, C_n$  les colonnes du déterminant définissant  $V_n(x_0, \dots, x_n)$ . En effectuant les opérations,  $C_i \leftarrow C_i - x_0 C_{i-1}$  pour  $n$  variant  $i$  variant de  $n$  à 1, on obtient

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

On peut alors factoriser chacune des lignes et on obtient

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \right) V_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

On conclut alors par une récurrence similaire à celle effectuée pour la première méthode.

### Solution 29

1. On trouve

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En développant  $D_{n+2}$  par rapport à la première colonne

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+2]} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

En développant le second déterminant par rapport à la première ligne,

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$$

3. La suite  $(D_n)$  vérifie la relation de récurrence  $D_{n+2} - 2D_{n+1} + D_n = 0$ . L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est  $r^2 - 2r + 1 = 0$  qui admet 1 pour racine double. Il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $D_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $D_1 = 2$  et  $D_2 = 3$ , on trouve  $\lambda = \mu = 1$  et donc  $D_n = n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Déterminants d'endomorphismes

### Solution 30

Notons  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$  et  $M$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a immédiatement que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\det(f) = \det(M) = 1 \neq 0$ , donc  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

### Solution 31

Notons respectivement  $p$  et  $s$  la projection et la symétrie de l'énoncé. Soient  $q = \dim F$  et  $r = \dim G$  (on a donc  $q + r = n$ ). Soit  $\mathcal{B}$  une base adaptée à la décomposition en somme directe  $E = F \oplus G$ .

La matrice de  $p$  dans cette base est  $\left( \begin{array}{c|c} I_q & \mathbf{0}_{q,r} \\ \hline \mathbf{0}_{r,q} & \mathbf{0}_{r,r} \end{array} \right)$ . On a donc  $\det p = 1$  si  $q = n$  et  $\det p = 0$  sinon.

La matrice de  $s$  dans cette base est  $\left( \begin{array}{c|c} I_q & \mathbf{0}_{q,r} \\ \hline \mathbf{0}_{r,q} & -I_r \end{array} \right)$ . On a donc  $\det s = (-1)^r$ .

**Solution 32**

1. Si  $p = \text{Id}_E$ , alors  $\det p = 1$ . Si  $p \neq \text{Id}_E$ , alors  $p$  n'est pas inversible et  $\det p = 0$ .
2. Posons  $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ . On sait que  $E = F \oplus G$ . En écrivant la matrice de  $s$  dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe, on a  $\det s = (-1)^{\dim G}$ .
3.  $f$  est une symétrie et  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . On sait que  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$ . D'après la question précédente,  $\det f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

**Solution 33**

1. Si  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , alors  $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . De plus  $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN$ .
2. Notons classiquement  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} m(E_{11}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21} & m(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}E_{12} + a_{21}E_{22} \\ m(E_{21}) &= \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}E_{11} + a_{22}E_{21} & m(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22} \end{aligned}$$

Ainsi la matrice de  $m_A$  dans la base  $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$  (attention à l'ordre !) est la matrice définie par blocs  $\left( \begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A \end{array} \right)$ . On a donc  $\det(m_A) = (\det A)^2$ .

3. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note à nouveau  $m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$ .  $m_A$  est encore un endomorphisme. On note  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Remarquons que  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ . On a alors

$$m_A(E_{ij}) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}E_{kl}E_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}\delta_{li}E_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$$

La matrice de  $m_A$  dans la base  $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn})$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$  diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont tous égaux à  $A$ . On en déduit que  $\det(m_A) = (\det A)^n$ .

**Solution 34**

1. Evident.
2. Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u_\sigma \circ u_\tau(x_1, \dots, x_n) = u_\sigma(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = (u_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, u_{\tau \circ \sigma(n)}) = u_{\tau \circ \sigma}(x_1, \dots, x_n)$$

On en déduit que  $u_\sigma \circ u_\tau = u_{\tau \circ \sigma}$ .

3. On a  $u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}} = u_{\sigma^{-1} \circ \sigma} = u_{\text{Id}_{\mathbb{R}^n}} = \text{Id}_E$ . Ainsi  $u_\sigma$  est inversible (et  $(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$ ).

Pour  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$U(\sigma \circ \tau) = u_{(\sigma \circ \tau)^{-1}} = u_{\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}} = u_{\sigma^{-1}} \circ u_{\tau^{-1}} = U(\sigma) \circ U(\tau)$$

donc  $U$  est bien un morphisme de groupes.

4. Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$ . Donc

$$\det(u_\sigma) = \det(u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(n)}) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

car un déterminant est une forme multilinéaire antisymétrique.



**Solution 35**

1.  $f$  est linéaire par linéarité de l'intégrale.

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l} X^l$$

Ainsi  $\deg f(X^k) = k \leq n$  et  $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par linéarité,  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .  
 $f$  induit bien un endomorphisme  $f_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. L'expression de  $f(X^k)$  trouvée à la question précédente montre que la matrice de  $f_n$  dans la base canonique est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux valent  $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{k} = 1$  pour  $k$  variant de 0 à  $n$ . Le déterminant de  $f_n$  vaut donc 1.

**Solution 36**

1. On a alors

$$\det(u)^2 = \det(u^2) = \det(-\text{Id}_E) = (-1)^{\dim E}$$

Puisque  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\det(u) \in \mathbb{R}$  et donc  $\det(u)^2 \geq 0$  donc  $\dim E$  est paire.

2. On utilise la mise sous forme canonique.

$$u^2 + u + \text{Id}_E = \left(u + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)^2 + \frac{1}{4} \text{Id}_E$$

Ainsi

$$\det\left(u + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right)^2 = \det\left(-\frac{1}{4} \text{Id}_E\right) = \left(\frac{-1}{4}\right)^{\dim E}$$

de sorte que  $\dim E$  est paire.

**REMARQUE.** De manière générale, la même méthode montre que s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u^2 + au + b \text{Id}_E = 0$  et  $a^2 - 4b < 0$ , alors  $\dim E$  est paire.

**Solution 37**

1. On trouve évidemment  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $V(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$  donc

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

$V$  s'annule donc en  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  et  $\lambda_3 = 3$ .

3. Notons  $A_k$  la matrice de  $u - \lambda_k \text{Id}_E$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  pour  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

On a  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ . Via l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ , on voit que  $\text{rg}(u - \lambda_1 \text{Id}_E) = 2$  et que  $e_1 + e_2 + e_3 \in \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E)$ .

Via le théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E) = 1$  et  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$  est un vecteur directeur de  $\text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E)$ .

On a  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ . Via l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ , on voit que  $\text{rg}(u - \lambda_2 \text{Id}_E) = 2$  et que  $e_1 + e_2 \in \text{Ker}(u - \lambda_2 \text{Id}_E)$ . Via le

théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(u - \lambda_2 \text{Id}_E) = 1$  et  $f_2 = e_1 + e_2$  est un vecteur directeur de  $\text{Ker}(u - \lambda_2 \text{Id}_E)$ .

On a  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ . Via l'opération  $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3$ , on voit que  $\text{rg}(u - \lambda_3 \text{Id}_E) = 2$  et que  $e_2 - 2e_3 \in \text{Ker}(u - \lambda_3 \text{Id}_E)$ . Via le

théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(u - \lambda_3 \text{Id}_E) = 1$  et  $f_3 = e_2 - 2e_3$  est un vecteur directeur de  $\text{Ker}(u - \lambda_3 \text{Id}_E)$ .

4. Vérifions que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$  à l'aide du déterminant.

$$\det_{(e_1, e_2, e_3)}(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc  $(f_1, f_2, f_3)$  est bien une base de  $E$ . Puisque  $u(f_k) = \lambda_k f_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , la matrice de  $u$  dans cette base est  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

5. Il suffit de prendre pour  $P$  la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  vers la base  $(f_1, f_2, f_3)$  i.e.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Par pivot de Gauss,

$$\text{on trouve } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La matrice de  $u^n$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $A^n$ . On prouve par récurrence que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Puisque  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

On en déduit que

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(3 \cdot 2^n - 1) & 4(1 - 2^n) & 2(1 - 2^n) \\ -2 + 3 \cdot 2^n - 3^n & 4 - 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & 2 - 2^n - 3^n \\ 2(3^n - 1) & 4(1 - 3^n) & 2(3^n + 1) \end{pmatrix}$$

## Déterminants par blocs

### Solution 38

1. On a  $A \otimes B = \left( \begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array} \right)$  et  $C \otimes D = \left( \begin{array}{c|c} c_{11}D & c_{12}D \\ \hline c_{21}D & c_{22}D \end{array} \right)$ . Un calcul par blocs donne

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = \left( \begin{array}{c|c} (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21})BD & (a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22})BD \\ \hline (a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})BD & (a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22})BD \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} ac_{11}BD & ac_{12}BD \\ \hline ac_{21}BD & ac_{22}BD \end{array} \right) = (AC) \otimes (BD)$$

en notant  $ac_{ij}$  le coefficient en position  $(i, j)$  de la matrice  $AC$ .

2.  $I_2 \otimes B = \left( \begin{array}{c|c} B & 0_2 \\ \hline 0_2 & B \end{array} \right)$  donc  $\det(I_2 \otimes B) = (\det B)^2$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^4$  canoniquement associé à  $A \otimes I_2$ . Notons  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ . Alors la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, e_3, e_2, e_4)$  est  $I_2 \otimes A$ . On a donc  $\det(A \otimes I_2) = \det u = \det(I_2 \otimes A) = (\det A)^2$  d'après ce qui précède.

D'après la première question,  $A \otimes B = (A \otimes I_2) \cdot (I_2 \otimes B)$ . Ainsi  $\det(A \otimes B) = (\det A)^2 (\det B)^2$ .

3. Puisqu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'après la question précédente,  $A \times B$  est inversible si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont. Dans ce cas, on a d'après la première question

$$(A \otimes B) \cdot (A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_2 \otimes I_2 = I_4$$

### Solution 39

Remarquons que

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array} \right)$$

En passant aux déterminants, on obtient

$$\det(M) \cdot \left| \begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & S \end{array} \right|$$

Il ne s'agit plus que de déterminants triangulaires par blocs :

$$\det(M) \det(I_p) \det(I_q) = \det(A) \det(S)$$

et finalement  $\det(M) = \det(A) \det(S)$ .

**Solution 40**

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , posons  $D_\lambda = D + \lambda I_n$  et

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_\lambda \end{pmatrix}.$$

Notons  $N_\lambda = \begin{pmatrix} D_\lambda & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ . On a clairement

$$\det(N_\lambda) = \det(D_\lambda)$$

et

$$M_\lambda N_\lambda = \begin{pmatrix} AD_\lambda - BC & B \\ CD_\lambda - D_\lambda C & D_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD_\lambda - BC & B \\ 0 & D_\lambda \end{pmatrix}$$

car  $D_\lambda C = CD_\lambda$ . Ainsi,

$$\det(M_\lambda N_\lambda) = \det(AD_\lambda - BC) \det(D_\lambda),$$

or, on a aussi

$$\det(M_\lambda N_\lambda) = \det(M_\lambda) \det(N_\lambda) = \det(M_\lambda) \det(D_\lambda).$$

Comme le spectre de  $D$  est fini, il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \quad \det(D_\lambda) \neq 0$$

et donc

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \quad \det(M_\lambda) = \det(AD_\lambda - BC).$$

Cette égalité entre deux fonctions polynomiales en  $\lambda$  (il suffit d'appliquer la formule développée du déterminant) étant vérifiée sur un ensemble infini, les deux fonctions sont en fait égales, en particulier pour  $\lambda = 0$  :

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

**Inégalités****Solution 41**

Supposons  $n$  impair et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. Alors

$$\det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

donc  $\det(A) = 0$ . A fortiori,  $\det(A) \geq 0$ .

Pour le cas pair, on raisonne par récurrence.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $k \neq l$ , on notera  $P_{kl} = (\delta_{i, \tau(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$  où  $\tau$  est la transposition de  $\mathfrak{S}_n$  échangeant  $k$  et  $l$ . La multiplication à gauche (resp. à droite) d'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  échange les  $k^{\text{ème}}$  et  $l^{\text{ème}}$  lignes (resp. colonnes). On remarque que  $P_{kl}$  est symétrique et inversible car  $P_{kl}^2 = I_n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  antisymétrique. Alors il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  donc  $\det(A) = a^2 \geq 0$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $p \geq 2$  tel que toute matrice antisymétrique réelle de taille  $2(p-1)$  soit de déterminant positif. Soit  $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$  antisymétrique. Si  $A = 0$ , alors  $\det A = 0$ . Sinon, il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $A_{ij} \neq 0$ . Posons  $B = P_{2j} P_{1i} A P_{1i} P_{2j}$ .

Comme  $P_{1i}$  et  $P_{2j}$  sont symétriques,  $B$  est antisymétrique.  $B$  est donc de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} J & U \\ \hline -U^\top & C \end{array} \right)$  avec  $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{pmatrix}$  et  $C$  antisymétrique.

Comme  $a_{ij} \neq 0$ ,  $J$  est inversible. Posons  $Q = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & -J^{-1}U \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right)$ .  $Q$  est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible. Posons

$D = Q^\top B Q$ . Alors  $D = \left( \begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)$  avec  $E = U^\top J^{-1} U + C$ . Or

$$\det(D) = \det(Q)^2 \det(B) = \det(B)$$

et

$$\det(A) = \det(B) \det(P_{1i})^2 \det(P_{2j})^2 = \det(B)$$

donc

$$\det(A) = \det(D) = \det(J) \det(E) = A_{ij}^2 \det(E)$$

Or E est antisymétrique car J et C le sont. Par hypothèse de récurrence,  $\det(E) \geq 0$  donc  $\det(A) \geq 0$ . Par récurrence, toute matrice antisymétrique réelle de taille paire possède un déterminant positif.

### Solution 42

1. En posant  $S = a^2 + b^2 + c^2$  et  $\sigma = ab + bc + ac$ , on a :

$$AA^T = \begin{pmatrix} S & \sigma & \sigma \\ \sigma & S & \sigma \\ \sigma & \sigma & S \end{pmatrix}.$$

2. Posons  $\delta = \det(A)$ . On a, par  $L_k \leftarrow L_k - \sigma L_1$  pour  $k = 2$  et  $3$  :

$$\begin{aligned} \det(AA^T) &= \delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ \sigma & 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ 0 & 1 - \sigma^2 & \sigma - \sigma^2 \\ 0 & \sigma - \sigma^2 & 1 - \sigma^2 \end{vmatrix} \\ &= 2(\sigma - 1)^2(\sigma + 1/2) \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\sigma| \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

donc  $\sigma \in [-1, 1]$ . Notons, pour tout réel  $\sigma$ ,

$$P(\sigma) = 2(\sigma - 1)^2(\sigma + 1/2) = 2\sigma^3 - 3\sigma^2 + 1.$$

Comme

$$P'(\sigma) = 6(\sigma - 1)\sigma,$$

la fonction P est croissante sur  $[-1, 0]$  et décroissante sur  $[0, 1]$ . Comme

$$P(-1) = -4, \quad P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0$$

et  $P(\sigma) = \delta^2 \geq 0$ , on en déduit que

$$P(\sigma) \in [0, 1]$$

et donc que

$$|\delta| = \sqrt{P(\sigma)} \in [0, 1].$$

## Comatrice

### Solution 43

On a

$$(*) \quad \text{com}(A) = \det(A) (A^T)^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}\det(\operatorname{com}(A)) &= \det(\det(A) (A^T)^{-1}) \\ &= \det(A)^n \det((A^T)^{-1}) \\ &= \det(A)^{n-1}.\end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule (\*), on obtient

$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = \det(\operatorname{com}(A)) (\operatorname{com}(A)^T)^{-1},$$

puis

$$\begin{aligned}\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) &= \det(A)^{n-1} (\det(A) A^{-1})^{-1} \\ &= \det(A)^{n-1} \det(A)^{-1} A \\ &= \det(A)^{n-2} A.\end{aligned}$$

#### Solution 44

1. Le déterminant d'une matrice est une somme de produits de coefficients de cette matrice. Comme les coefficients de  $A$  et  $B$  sont des entiers,  $\det A$  et  $\det B$  sont également des entiers.
2. On sait que  $A \operatorname{com}(A)^T = (\det A) I_n$  et que  $B \operatorname{com}(B)^T = (\det B) I_n$ . Comme  $\det A \wedge \det B = 1$ , il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $u \det A + v \det B = 1$ . En posant  $U = u \operatorname{com}(A)^T$  et  $V = v \operatorname{com}(B)^T$ , on a donc  $AU + BV = I_n$ . Les coefficients de  $\operatorname{com} A$  et  $\operatorname{com} B$  sont, au signe près, des déterminants d'ordre  $n - 1$  extraits de  $A$  et  $B$  : ce sont donc des entiers. Ainsi  $U$  et  $V$  sont à coefficients entiers.

#### Solution 45

Il y a trois cas.

- Soit  $\operatorname{rg}(A) = n$ . Alors  $A$  est inversible et  $\operatorname{com}(A)$  également puisque  $\det(A) \neq 0$  et  $\left(\frac{1}{\det(A)} A^T\right) \operatorname{com}(A) = I_n$ . Donc  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n$ .
- Soit  $\operatorname{rg}(A) < n - 1$ . Alors toutes les sous-matrices carrées de taille  $n - 1$  extraites de  $A$  sont de déterminant nul. Par conséquent  $\operatorname{com}(A) = 0$  et  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0$ .
- Soit  $\operatorname{rg}(A) = n - 1$ . Alors on peut extraire de  $A$  une sous-matrice carrée inversible de taille  $n - 1$  qui est, au signe près, un cofacteur de  $A$ . Ainsi  $\operatorname{com}(A) \neq 0$ . Puisque  $\det(A) = 0$ , on a  $A^T \operatorname{com}(A) = \det(A) I_n = 0$ . Ainsi  $\operatorname{Im}(\operatorname{com}(A)) \subset \operatorname{Ker}(A^T)$ . Puisque  $\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A) = n - 1$ ,  $\dim \operatorname{Ker}(A^T) = 1$  via le théorème du rang. Ainsi  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) \leq 1$ . Puisque  $\operatorname{com}(A)$  est non nulle,  $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1$ .

## Divers

#### Solution 46

1.  $M(a, b)$  est inversible si et seulement si  $\det M(a, b) \neq 0$ . Or  $\det M(a, b) = |a|^2 + |b|^2$ . Donc  $M(a, b)$  est inversible si et seulement si  $(a, b) \neq (0, 0)$ .
2. D'abord,  $M(1, 0) = I_2$  et pour  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,

$$M(a, b)M(c, d) = M(ac - \bar{b}d, bc + \bar{a}d)$$

Enfin, pour  $(a, b) \neq (0, 0)$

$$M(a, b)^{-1} = \frac{1}{\det M(a, b)} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = M\left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}, \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}\right)$$

Ceci prouve que  $\mathcal{K} \setminus \{0\}$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{C})$ .

**Solution 47**

$f$  est clairement une forme  $n$ -linéaire. Montrons qu'elle est alternée. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . On suppose qu'il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$  et  $x_i = x_j$ . Parmi les termes de la somme définissant  $f(x_1, \dots, x_n)$ , ceux où n'apparaît pas  $f(x_i)$  ou  $f(x_j)$  sont nuls d'après le caractère alterné du déterminant. Les deux termes restant sont ceux faisant apparaître  $f(x_i)$  et  $f(x_j)$ . On obtient l'un à partir de l'autre en échangeant les vecteurs  $f(x_i) = f(x_j)$  et  $x_i = x_j$  : le caractère alterné du déterminant permet d'affirmer que ces deux termes sont opposés. Il s'ensuit que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  puis le caractère alterné de  $f$ .

En tant que forme  $n$ -linéaire alternée,  $f$  est proportionnelle à  $\det_{\mathcal{B}}$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ . Pour déterminer cette constante, il suffit d'évaluer la dernière égalité sur la base de  $\mathcal{B}$  de  $E$ . En notant  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$ . Le  $i^{\text{ème}}$  terme de la somme définissant  $f(e_1, \dots, e_n)$  est le déterminant de la matrice  $I_n$  dans laquelle on a remplacé la  $i^{\text{ème}}$  colonne par le vecteur colonne composé des coordonnées de  $u(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En développant ce déterminant par rapport à sa  $i^{\text{ème}}$  ligne, on trouve qu'il est égale à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $u(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ceci signifie que  $\lambda = f(x_1, \dots, x_n)$  est égal à la somme des coefficients diagonaux de la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Autrement dit,  $\lambda = \text{tr}(u)$ .

**Solution 48**

Remarquons tout d'abord que si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , alors  $|\det(M)| = 1$ . En effet,  $M$  et  $M^{-1}$  sont à coefficients entiers donc leurs déterminants également et  $\det(M) \det(M^{-1}) = \det(I_n) = 1$ .

Soit  $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + \lambda B)$ . Cette application est polynomiale de degré au plus  $n$ . De plus, elle prend  $2n + 1$  fois les valeurs 1 ou  $-1$ . On en déduit que  $\varphi + 1$  ou  $\varphi - 1$  s'annule au moins  $n + 1$  fois. Puisque  $\varphi + 1$  et  $\varphi - 1$  sont de degré au plus  $n$ , l'une de ces deux applications est nulle. Il existe donc  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tel que  $\varphi = \varepsilon$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varphi(1/x) = \varepsilon$ , ce qui peut encore s'écrire  $\det(B + xA) = \varepsilon x^n$ . Les applications  $x \mapsto \det(B + xA)$  et  $x \mapsto \varepsilon x^n$  sont polynomiales et coïncident sur  $\mathbb{R}^*$ , elles coïncident donc en 0. On en déduit que  $\det(B) = 0$ .

**Solution 49**

Puisque  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $PA = BP$ . On peut poser  $P = Q + iR$  avec  $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . Puisque  $A$  et  $B$  sont réelles, on obtient  $QA = BQ$  et  $RA = BR$  par passage aux parties réelle et imaginaire.

Posons  $D(\lambda) = \det(P + \lambda Q)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Puisque le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice,  $D$  est une fonction polynomiale. Puisque  $D(i) \neq 0$ ,  $D$  n'est pas constamment nulle sur  $\mathbb{C}$ . Elle ne peut pas être constamment nulle sur  $\mathbb{R}$  car elle serait alors nulle sur  $\mathbb{C}$  puisque  $\mathbb{R}$  est infini.

Soit donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $D(\lambda) \neq 0$ . Alors  $S = Q + \lambda R$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et est inversible et  $SA = BS$ , ce qui prouve que  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 50**

1. Soit  $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ . Puisque  $x \in \text{Im } f$ , il existe  $y \in \mathbb{R}^3$  tel que  $x = f(y)$ . Comme  $f^3 + f = 0$ ,  $f^3(y) + f(y) = 0$  i.e.  $f^2(x) + x = 0$ . Or  $x \in \text{Ker } f$  donc  $f(x) = 0$  puis  $f^2(x) = 0$ . Finalement  $x = 0$ .  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont donc en somme directe. D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$ . On en conclut que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .
2.
  - a. Comme  $f$  est non nul,  $\text{Im } f \neq \{0\}$  donc  $\text{Im } f$  contient un vecteur non nul  $u$ .
  - b. Cela a en fait déjà été démontré à la première question.
  - c. Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda u + \mu f(u) = 0$ . En composant par  $f$ , on a également  $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0$  i.e.  $\lambda f(u) - \mu u = 0$ . En éliminant  $f(u)$  dans les deux égalités, on trouve  $(\lambda^2 + \mu^2)u = 0$ . Comme  $u$  est non nul, on a  $\lambda^2 + \mu^2 = 0$  et donc  $\lambda = \mu = 0$ . Ainsi  $(u, f(u))$  est une famille libre de  $\text{Im } f$ , d'où  $\text{rg } f \geq 2$ .
3.
  - a. Comme  $\text{rg } f = 3$ ,  $f$  est un endomorphisme surjectif donc bijectif. En composant  $f^3 + f = 0$  par  $f^{-1}$ , on aboutit à  $f^2 + \text{Id} = 0$  i.e.  $f^2 = -\text{Id}$ .
  - b. On a donc  $\det(f^2) = \det(-\text{Id}) = (-1)^3 = -1$ . Or  $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$ . Il y a donc contradiction. La seule possibilité est donc  $\text{rg } f = 2$ . Par le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } f = 1$ .
4. Puisque  $\dim \text{Ker } f = 1$ , il existe  $v \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\text{Ker } f = \text{vect}(v)$ . De plus,  $(u, f(u))$  est une famille libre de  $\text{Im } f$  et donc une base de  $\text{Im } f$  puisque  $\text{rg } f = 2$ . Puisque  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$  sont supplémentaires,  $(v, f(u), u)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . La matrice de  $f$  dans cette base est bien de la forme voulue.

**Solution 51**

1. On remarque que  $K^2 = pK$ . On montre alors par récurrence que  $K^n = p^{n-1}K$  pour  $n \geq 1$ . On a bien entendu  $K^0 = I_p$ .

2. **Première méthode** On a  $A = \frac{1}{p-1}(K - I)$ . D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{(p-1)^n} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} K^k \right] \\ &= \frac{1}{(p-1)^n} \left[ (-1)^n I_p + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} K^k \right] \\ &= \frac{1}{(p-1)^n} \left[ (-1)^n I_p + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} p^{k-1} K \right] \\ &= \frac{1}{(p-1)^n} \left[ (-1)^n I_p + \frac{1}{p} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} p^k \right) - (-1)^n K \right] \\ &= \frac{1}{(p-1)^n} \left[ (-1)^n I_p + \frac{1}{p} ((p-1)^n - (-1)^n) K \right] \end{aligned}$$

Or  $K = (p-1)A + I$ . On trouve après simplification :

$$A^n = \left( \frac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \frac{1}{p} \right) I_p + \left( \frac{p-1}{p} - \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}} \right) A$$

On a donc  $v_n = \frac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \frac{1}{p}$  et  $u_n = \frac{p-1}{p} - \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}$ .

**Deuxième méthode** On a  $K^2 = pK$  et  $K = (p-1)A + I_p$ . On en déduit que  $(p-1)A^2 - (p-2)A - I_p = 0$ . Notons  $R_n$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P = (p-1)X^2 - (p-2)X - 1$ . On a donc  $\deg R_n \leq 1$ . Posons  $R_n = u_n X + v_n$ . Les racines de  $P$  sont 1 et  $-\frac{1}{p-1}$ . On a donc  $R_n(1) = 1^n = 1$  et  $R_n\left(-\frac{1}{p-1}\right) = \frac{(-1)^n}{(p-1)^n}$ . Or  $R(1) = u_n + v_n$  et  $R_n\left(-\frac{1}{p-1}\right) = -\frac{1}{p-1}u_n + v_n$ . On en déduit  $u_n = \frac{p-1}{p} - \frac{(-1)^n}{p(p-1)^{n-1}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n p}{(p-1)^{n-1}} + \frac{1}{p}$ . Comme  $P(A) = 0$ ,  $A^n = R_n(A) = u_n A + v_n$ .

3. On a  $AX = X$ . Par récurrence,  $A^n X = X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(A^n X)$  est constante égale à  $X$ . Sa limite est  $X$ .

4. **Première méthode** Notons  $L_1, \dots, L_p$  les lignes d'une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . On effectue les opérations suivantes à la fois sur  $A$  et  $I_p$  :

- $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=2}^p L_k$  ;
- $L_k \leftarrow L_k - \frac{1}{p-1} L_1$  pour  $2 \leq k \leq p$  ;
- $L_k \leftarrow -(p-1)L_k$  pour  $2 \leq k \leq p$  ;
- $L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^p L_k$ .

De cette façon, la matrice  $A$  est transformée en  $I_p$  et la matrice  $I_p$  est transformée en la matrice  $B$  avec des  $(2-p)$  sur la diagonale et des 1 ailleurs. Ceci prouve que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = B$ .

**Deuxième méthode** On a vu précédemment que  $(p-1)A^2 - (p-2)A - I_p = 0$  i.e.  $A[(p-1)A - (p-2)I] = I_p$ . On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = (p-1)A - (p-2)I$ .  $A^{-1}$  est la matrice avec des  $(2-p)$  sur la diagonale et des 1 ailleurs.

5. **Première méthode** La matrice  $A(\lambda) = A - \lambda I_p$  est la matrice avec des  $-\lambda$  sur la diagonale et des  $\frac{1}{p-1}$  ailleurs. La matrice  $A\left(-\frac{1}{p-1}\right)$  est évidemment de rang 1 <  $p$  donc son déterminant est nul. De même la somme des colonnes de  $A(1)$  est nulle donc son déterminant est nul. Donc  $\chi$  admet pour racines  $\lambda_1 = -\frac{1}{p-1}$  et  $\lambda_2 = 1$ . Après calcul, on trouve  $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p) = 0$ .

**Deuxième méthode** Le polynôme  $P = (p-1)X^2 - (p-2)X - 1$  admet  $\lambda_1 = -\frac{1}{p-1}$  et  $\lambda_2 = 1$  pour racines. Donc  $P = (p-1)(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ . On en déduit que  $(A - \lambda_1 I_p)(A - \lambda_2 I_p) = \frac{1}{p-1}P(A) = 0$ . Les matrices  $A - \lambda_1 I_p$  et  $A - \lambda_2 I_p$  ne sont pas inversibles sinon on aurait  $A - \lambda_2 I_p = 0$  ou  $A - \lambda_1 I_p = 0$ , ce qui n'est pas. On en déduit que  $\det(A - \lambda_1 I_p) = \det(A - \lambda_2 I_p) = 0$  i.e. que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des racines de  $\chi$ .