

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## Equations différentielles linéaires d'ordre 1

### Solution 1

Puisque

$$\int \operatorname{th}(t) dt = \ln(\operatorname{ch}(t)) = A(t),$$

la fonction

$$y_0 : t \mapsto e^{-A(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

est une solution non nulle de l'équation homogène. Appliquons la méthode de la variation de la constante : les solutions sont de la forme  $\lambda y_0$  avec  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \operatorname{sh}(t),$$

ie

$$\lambda(t) = \int \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) dt = \int \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) dt = \frac{1}{4} \operatorname{ch}(2t) + k$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(2t)}{4 \operatorname{ch}(t)} + \frac{k}{\operatorname{ch}(t)}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ .

### Solution 2

Appliquons la méthode la variation de la constante sur I. Puisque

$$- \int -\tan(x) dx = -\ln(\cos(x)),$$

les solutions de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{\cos(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de  $(E)$  sont de la forme  $t \mapsto \frac{\lambda(t)}{\cos(t)}$  avec  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall t \in I, \frac{\lambda'(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{1 + \cos(t)},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} = 1 - \frac{1}{2 \cos^2(t/2)}.$$

Les solutions de  $(E)$  sur  $] -\pi/2, \pi/2[$  sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{t - \tan(t/2) + \lambda}{\cos(t)}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 3

L'équation s'écrit :

$$y - \frac{2-x}{(1-x)^2} y = 0.$$

Comme

$$\forall x < 1, \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

on a :

$$\int \frac{2-x}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$$

et les solutions de l'équation sont de la forme :

$$x < 1 \mapsto \frac{k}{1-x} e^{1/(1-x)}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

#### Solution 4

► Comme

$$\int \operatorname{th}(t) dt = \ln(\operatorname{ch}(t)),$$

les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{\operatorname{ch}(t)}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

► Appliquons la méthode de la variation des constantes : les solutions de l'équation de l'énoncé sont de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k(t)}{\operatorname{ch}(t)}$$

avec  $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{k'(t)}{\operatorname{ch}(t)} = t \operatorname{th}(t)$$

i.e.

$$k(t) = \int t \operatorname{sh}(t) dt.$$

Après une simple intégration par parties (justifiée puisque toutes les fonctions en jeu sont dérivables), on obtient :

$$k(t) = t \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) + k_1, \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto t - \operatorname{th}(t) + \frac{k_1}{\operatorname{ch}(t)}, \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Une telle fonction  $z_1$  vérifie la condition initiale  $z_1(0) = 1$  si et seulement si  $k_1 = 1$ , d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_1(t) = t - \operatorname{th}(t) + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

#### Solution 5

1. Comme

$$\int \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} dx = \ln(2 - \cos(x)),$$

les solutions de  $(E_H)$  sont de la forme :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{2 - \cos(x)}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. On vérifie sans peine que

$$x \in \mathbb{R} \mapsto 2 - \cos(x)$$

est une solution particulière de  $(E)$ .

3. D'après les deux questions précédentes, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{2 - \cos(x)} + 2 - \cos(x), \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Une telle fonction  $h$  vérifie la condition initiale  $h(0) = 1$  si et seulement si  $k = 0$ , d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 2 - \cos(x).$$

### Solution 6

► Puisque sur  $I$  le sinus est strictement positif,

$$\int \cotan(t) dt = \ln(|\sin(t)|) = \ln(\sin(t))$$

et les solutions sur cet intervalle de l'équation homogène ( $\mathbf{E}_H$ ) sont donc les fonctions de la forme,

$$t \in I \mapsto \frac{\lambda}{\sin(t)}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

► Appliquons la méthode de la variation de la constante pour résoudre (E) sur  $I$ . D'après le point précédent, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme  $t \in I \mapsto \frac{\lambda(t)}{\sin(t)}$  où  $\lambda$  est une fonction définie et dérivable sur  $I$  vérifiant

$$\forall t \in I, \frac{\lambda'(t)}{\sin(t)} = \cos^2(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda(t) = \int \sin(t) \cos^2(t) dt = -\frac{1}{3} \cos^3(t) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \in I \mapsto -\frac{\cos^3(t)}{3 \sin(t)} + \frac{C}{\sin(t)}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

### Solution 7

1. Appliquons la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène ( $\mathbf{E}_H$ ) admettant pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R},$$

les solutions de (E) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x) e^x$$

avec  $\lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) e^x = -\arctan(e^x).$$

On conclut le calcul par une intégration par parties,

$$\int -e^{-x} \arctan(e^x) dx = e^{-x} \arctan(e^x) - \int \frac{dx}{1 + e^{2x}}$$

or,

$$\int \frac{dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{1 + e^{2x} - e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$$

d'où

$$\int \frac{dx}{1 + e^{2x}} = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1),$$

et les solutions sont de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(e^x) - x e^x + \frac{e^x}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \lambda e^x (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. Appliquons la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène ( $E_H$ ) admettant pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

les solutions de ( $E$ ) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$$

avec  $\lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} = -\arctan(e^x).$$

On conclut donc par un calcul de primitive par une intégration par partie :

$$\int -e^x \arctan(e^x) dx = -e^x \arctan(e^x) + \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx.$$

Les solutions de ( $E$ ) sont donc de la forme

$$x \mapsto -\arctan(e^x) + \frac{e^{-x}}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \lambda e^{-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

### Solution 8

1. Puisque  $2 - 1 \neq 0$ , l'équation admet une solution de la forme  $f(t) = (at + b)e^{-t}$ . On a

$$\begin{aligned} f'(t) + 2f(t) &= (2at + 2b + a - at - b)e^{-t} \\ &= (at + a + b)e^{-t} \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc solution si et seulement si  $a = 1$  et  $a + b = 0$ . Ainsi  $f(t) = (t - 1)e^{-t}$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto (t - 1)e^{-t} + ke^{-2t}$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

2. Puisque  $2 - 2 = 0$ , l'équation admet une solution de la forme  $f(t) = ate^{-2t}$ . On a  $f'(t) + 2f(t) = ae^{-2t}$ ; la fonction  $f$  est donc solution si et seulement si  $a = 1$ . Ainsi  $f(t) = te^{-2t}$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme  $t \mapsto te^{-2t} + ke^{-2t}$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

### Solution 9

Puisque  $\forall t \in \mathbb{R}, t \cos(t) = \operatorname{Re}(te^{it})$ , on commence par déterminer une solution particulière de  $y' + y = te^{it}$ . Comme  $i \neq -1$ , il existe une solution particulière de la forme

$$f(t) = (\alpha t + \beta)e^{it}.$$

Puisque

$$f'(t) = (i\alpha t + i\beta + \alpha)e^{it},$$

la fonction  $f$  est solution de ( $E$ ) si et seulement si

$$(i\alpha t + i\beta + \alpha + \alpha t + \beta)e^{it} = te^{it},$$

c'est-à-dire  $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(i+1)t + (i+1)\beta + \alpha = t$ . Après identification des coefficients, on aboutit à  $\alpha(1+i) = 1$  et  $(1+i)\beta + \alpha = 0$ , système dont les solutions sont  $\alpha = 1/(1+i) = \frac{1-i}{2}$  et  $\beta = \frac{i}{2}$ . Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left[ \frac{1-i}{2}t + \frac{i}{2} \right] e^{it}.$$

La partie réelle de  $f$ ,

$$t \mapsto \frac{t \cos(t)}{2} + \frac{t-1}{2} \sin(t),$$

est une solution particulière de l'équation initiale ( $E$ ). Puisque la solution de générale de ( $E_H$ ) est  $t \mapsto \lambda e^{-t}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les solutions de ( $E$ ) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{t \cos(t)}{2} + \frac{t-1}{2} \sin(t) + \lambda e^{-t}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Solution 10**

Recherchons une solution particulière : d'après le théorème de superposition, il suffit de trouver des solutions particulières aux équations  $y' - y = e^t$  et  $y' - y = e^{2t}$  et de les ajouter. En appliquant la méthode précédente, on trouve facilement les solutions  $t \mapsto te^t$  et  $t \mapsto e^{2t}$ . Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto te^t + e^{2t} + ke^t$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**Solution 11**

1. On trouve sans peine

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \frac{dx}{x} = x(\ln(x) - 1).$$

L'intégration par parties étant légitime car toutes les fonctions en jeu sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. D'après la question précédente, les solutions de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ke^{x(\ln(x)-1)} = Kx^x e^{-x}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Appliquons alors la méthode de la variation de la constante : les solutions de  $(E)$  sont de la forme  $x \mapsto K(x)x^x e^{-x}$  avec  $K : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  dérivable. En remplaçant dans  $(E)$ , on aboutit à

$$K'(x)x^x e^{-x} = x^x,$$

ce qui équivaut à  $K'(x) = e^x$ , ie  $K(x) = e^x + C$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ . Les solutions de  $(E)$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x^x + Cx^x e^{-x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

**Solution 12**

1. L'équation homogène  $(E_{1H})$  admet les solutions  $x \mapsto Ce^{-3x}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ . Passons sur  $\mathbb{C}$  et résolvons  $E_{1C} : y' + 3y = e^{ix}$ . D'après le cours, il existe une solution particulière de la forme  $x \mapsto ae^{ix}$ . Après tout calcul, on trouve  $a = \frac{3-i}{10}$ . On en déduit que

$$x \mapsto \operatorname{Im}\left(\frac{3-i}{10}e^{ix}\right) = \frac{3 \sin(x) - \cos(x)}{10}$$

est une solution particulière de  $(E_1)$ . Les solutions de  $(E_1)$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{3 \sin(x) - \cos(x)}{10} + Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène  $(E_{2H})$  admet les solutions  $x \mapsto Ce^{3x}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ . D'après le cours, il existe une solution particulière de la forme  $x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$  avec  $a, b, c$  et  $d$  réels. Après tout calcul, on trouve

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, -\frac{29}{128}\right).$$

Les solutions de  $(E_1)$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{16} + \frac{3x}{32} - \frac{29}{128}\right)e^{-x} + Ce^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Posons  $z = y''$ . La fonction  $y$  est solution de  $(E_3)$  si et seulement si  $z$  est solution de  $(E'_3) : z' - z = x$ . Comme  $(E'_{3H})$  admet pour solutions

$$x \mapsto Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

et que  $x \mapsto -x - 1$  est une solution évidente de  $(E'_3)$ , les solutions de  $E'_3$  sont de la forme

$$x \mapsto -x - 1 + Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que les solutions de  $(E_3)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + A_1 e^x + A_2 x + A_3,$$

avec  $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$ .

### Solution 13

Pour tout polynôme  $p$  non nul,  $p' + xp$  est un polynôme de degré  $\deg(p) + 1$  : une solution particulière polynomiale de  $(E)$  est donc nécessairement de degré un. On vérifie alors sans peine que  $x \mapsto x$  est une solution particulière. Comme  $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ , les solutions de  $(E_H)$  sont de la forme  $x \mapsto Ce^{-x^2/2}$  et celles de  $(E)$  sont de la forme

$$x \mapsto x + Ce^{-x^2/2}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

### Solution 14

La solution générale de  $(H)$  (qui est la même équation pour tous les numéros de cet exercice) est

$$x \mapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ax + b.$$

On aboutit à  $a = 1, a + b = 0$ , et ainsi  $a = 1$  et  $b = -1$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto x - 1 + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto (ax^2 + bx)e^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1/2$  et  $b = 0$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-x}.$$

On aboutit à  $a = 1/3$  et  $b = c = 0$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}e^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Le second membre est du type polynôme-exponentielle, on recherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ae^{2x}.$$

On aboutit à  $a = 1/3$ . Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. D'après le principe de superposition et les calculs menées en 2. et 5., la fonction suivante est une solution particulière de (E)

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x}.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + xe^{-x} + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Le second membre est du type polynôme-sinus, on passe sur  $\mathbb{C}$  et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{ix}$$

de la forme

$$x \mapsto ae^{ix}.$$

On aboutit à  $a = (1 - i)/2$ . Puisque la partie imaginaire de

$$\frac{1 - i}{2}e^{ix}$$

est solution de (E) et vaut

$$\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x),$$

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Le second membre est du type polynôme-cosinus, on passe sur  $\mathbb{C}$  et recherche une solution particulière de l'équation

$$y' + y = e^{(1+i)x}$$

de la forme

$$x \mapsto ae^{(1+i)x}.$$

On aboutit à  $a = (2 - i)/5$ . Puisque la partie réelle de

$$\frac{2 - i}{5}e^{(1+i)x}$$

est solution de (E) et vaut

$$\frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x),$$

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{2}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x) + \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## Solution 15

1. Appliquons la méthode de la variation de la constante : puisque

$$-\int 2x dx = -x^2,$$

les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont de la forme

$$x\lambda(x)e^{-x}$$

avec  $\lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x^2} = e^{x-x^2},$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = e^x,$$

Les solutions sont donc de **(E)** de la forme

$$x \mapsto e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2}.$$

L'unique solution valant 0 en 0 est donc

$$x \mapsto e^{x-x^2} - e^{-x^2}.$$

2. Puisque

$$-\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x},$$

les solutions de **(H)** sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{1/x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution valant 1 en 1 est donc

$$x \mapsto \frac{1}{e} e^{1/x}.$$

**REMARQUE.** Puisque le problème de Cauchy est une condition initiale en 1, rien ne sert de résoudre **(H)** sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ ...

3. Puisque

$$-\int \frac{-2}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2},$$

les solutions de **(H)** sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-1/x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution valant 1 en 1 est donc

$$x \mapsto e^{1-1/x^2}.$$

## Solution 16

- Résolution sur  $]0, +\infty[$  : l'équation **(E)** s'écrit

$$y' + \frac{x-1}{x}y = x.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{x-1}{x} dx = \ln(x) - x,$$

les solutions de **(H)** sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda x e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de **(E)** sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x) x e^{-x}$$

avec  $\lambda : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x > 0, \lambda'(x) x e^{-x} = x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \lambda'(x) = e^x.$$

Les solutions de **(E)** sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x + \lambda x e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



- Résolution sur  $] -\infty, 0[$  : l'équation (E) s'écrit

$$y' + \frac{1-x}{x}y = -x.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{1-x}{x} dx = x - \ln(-x),$$

les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \frac{e^x}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x) \frac{e^x}{x}$$

avec  $\lambda : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) \frac{e^x}{x} = x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x) = x^2 e^{-x}.$$

Recherchons une primitive sous la forme

$$x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}.$$

On aboutit à  $a = -1, b = -2$  et  $c = -2$ . Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x} + \lambda \frac{e^x}{x},$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 17

- Résolution sur  $I = ]1, +\infty[$  ou  $] -\infty, 0[$  : l'équation (E) s'écrit

$$y' - \frac{1}{x(x-1)}y = \frac{x}{x-1}.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int -\frac{1}{x(x-1)} dx = -\ln|x| + \ln|1-x|,$$

les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \frac{x-1}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x) \frac{x-1}{x}$$

avec  $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x) \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2x-2}{x^2-2x+1} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Les solutions de (E) sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x-1 + \frac{2(x-1)\ln|1-x|}{x} - \frac{1}{x} + \lambda \frac{1-x}{x},$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Résolution sur  $I = ]0, 1[$  : l'équation (E) s'écrit

$$y' + \frac{1}{x(x-1)}y = \frac{x}{1-x}.$$

Appliquons la méthode la variation de la constante. Puisque

$$-\int \frac{1}{x(x-1)}dx = \ln(x) - \ln(1-x),$$

les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \frac{x}{1-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda(x) \frac{x}{1-x}$$

avec  $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad \lambda'(x) \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x},$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = 1.$$

Les solutions de (E) sur  $]I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2 + \lambda x}{1-x},$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 18

Résolvons d'abord l'équation homogène associée :

$$(1+t^2)x' - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - \frac{1}{1+t^2}x = 0$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est  $t \mapsto \arctan t$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions  $t \mapsto Ce^{\arctan t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ . Ici, pas besoin de la méthode de la variation de la constante, on voit tout de suite que la fonction constante égale à  $-1$  est une solution particulière. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions  $t \mapsto -1 + Ce^{\arctan t}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### Solution 19

Posons  $g(x) = f(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $g$  est dérivable puisque  $f$  l'est et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = -f'(-x)$ . Comme  $f$  est solution de  $y' + ay = b$ ,  $f'(-x) + a(-x)f(-x) = b(-x)$  i.e.  $-g'(x) - a(x)g(x) = -b(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  en utilisant le fait que  $a$  et  $b$  sont impaires.  $g$  vérifie donc la même équation différentielle que  $f$ . De plus  $g(0) = f(0)$  donc  $g$  vérifie également la même condition initiale en 0. Comme il y a unicité de la solution avec condition initiale, c'est donc que  $f = g$  i.e.  $f$  est paire.

### Solution 20

Remarquons que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  puisque  $a$  et  $b$  y sont continues.

Si  $f$  est  $T$ -périodique, on a évidemment  $f(0) = f(T)$ .

Si  $f(0) = f(T)$ , posons  $g(t) = f(t+T)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  est solution de (E),  $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $f'(t+T) + a(t+T)f(t+T) = b(t+T)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Comme  $a$  et  $b$  sont  $T$ -périodiques,  $f'(t+T) + a(t)f(t+T) = b(t)$  ou encore  $g'(t) + a(t)g(t) = b(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $g$  est donc également solution de (E).

Enfin,  $f(0) = g(0)$  donc  $f$  et  $g$  vérifient la même condition initiale en 0. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy,  $f = g$  i.e.  $f$  est  $T$ -périodique.

### Solution 21

Notons (E) l'équation différentielle de l'énoncé et (H) son équation homogène associée.

Sur chacun des trois intervalles, l'équation (E) équivaut à

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$$

Puisque

$$-\int -\frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(|1-x^2|)$$

les solutions de **(H)** sur chacun des trois intervalles sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *Résolution sur  $I = ]1, +\infty[$*  : appliquons la méthode la variation de la constante. Les solutions de **(E)** sont de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

avec  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que

$$\forall x \in I, \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{1}{1-x^2}$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Les solutions de **(E)** sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{-\operatorname{argch}(x) + \lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *Résolution sur  $I = ]-\infty, -1[$*  : on raisonne de même et seul le calcul final de la primitive est différent : les solutions de **(E)** sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\operatorname{argch}(-x) + \lambda}{\sqrt{x^2-1}}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *Résolution sur  $I = ]-1, 1[$*  : on raisonne de même et seule la fin du calcul est différent :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Les solutions de **(E)** sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\arcsin(x) + \lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Solution 22

1. Les solutions de  $xy' - \alpha y = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \lambda x^\alpha$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Puisque  $f(1) = 1$ ,  $f$  est la fonction  $x \mapsto x^\alpha$ .

2. On a déjà résolu à la question précédente l'équation différentielle homogène associé à l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = f$ . On cherche donc une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme  $x \mapsto \lambda(x)x^\alpha$  avec  $\lambda$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x\lambda'(x)x^\alpha = x^\alpha$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc choisir  $\lambda : x \mapsto \ln x$ , ce qui fournit  $x \mapsto x^\alpha \ln x$  comme solution particulière.

Les solutions de l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $x \mapsto x^\alpha(\ln x + \lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $g(1) = 0$ ,  $g$  est la fonction  $x \mapsto x^\alpha \ln x$ .

3. On formule l'hypothèse de récurrence suivante

$$\text{HR}(n) : u_n \text{ est la fonction } x \mapsto \frac{x^\alpha \ln^n x}{n!}.$$

$\text{HR}(0)$  est vraie par définition de  $u_0$ .

Supposons  $\text{HR}(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . On a résolu l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = u_n$  à la première question. On cherche donc une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme  $x \mapsto \lambda(x)x^\alpha$  où  $\lambda$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x\lambda'(x)x^\alpha = \frac{x^\alpha \ln^n x}{n!}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(x) = \frac{\ln^n x}{n!x}$$

On peut donc choisir  $\lambda : x \mapsto \frac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!}$ , ce qui fournit  $x \mapsto \frac{x^\alpha \ln^{n+1} x}{(n+1)!}$  comme solution particulière.

Les solutions de l'équation différentielle  $xy' - \alpha y = f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $x \mapsto x^\alpha \left( \frac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!} + \lambda \right)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $u_{n+1}(1) = 0$ ,  $u_{n+1}$  est la fonction  $x \mapsto \frac{x^\alpha \ln^{n+1} x}{(n+1)!}$ . Ainsi  $\text{HR}(n+1)$  est vraie.

Par récurrence,  $\text{HR}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Solution 23

Remarquons que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + y = g$  avec  $g = f + f'$ . Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{-x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction  $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$  où  $\varphi$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $y' + y = g$  si et seulement si  $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On peut donc choisir  $\varphi(x) = \int_0^x e^t g(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Une solution particulière de  $y' + y = g$  est donc la fonction  $x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$ . Les solutions de  $y' + y = g$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$ . Puisque  $f$  est solution de cette équation différentielle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , il s'agit de prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt = 0$ .

Par inégalité triangulaire, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\left| \int_0^x e^t g(t) dt \right| \leq \int_0^x e^t |g(t)| dt$$

Puisque  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  de limite nulle en  $+\infty$ , elle est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|g(t)| \leq M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . D'après l'énoncé,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . Soit alors  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $x \geq A$ . Alors pour tout  $x \geq A$ ,

$$\int_0^x e^t |g(t)| dt = \int_0^A e^t |g(t)| dt + \int_A^x e^t |g(t)| dt \leq M \int_0^A e^t dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^x e^t dt = M(e^A - 1) + \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A)$$

Finalement pour tout  $x \geq A$

$$\left| e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \right| \leq M(e^A - 1)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) \leq Ce^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

en posant  $C = M(e^A - 1)$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-x} = 0$ , il existe  $B \in \mathbb{R}$  tel que  $Ce^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $x \geq B$ . Finalement pour tout  $x \geq \max(A, B)$ ,

$$\left| e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

On a donc montré que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt = 0$ , ce qui permet de conclure.

### Solution 24

1.  $y = x - 2$  est solution.

2. Posons  $I_1 = ]-\infty, -1[$  et  $I_2 = ]-1, +\infty[$ . Sur  $I_1$  et  $I_2$ ,  $x \mapsto x + 1$  ne s'annule pas, et une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$  est  $x \mapsto x - \ln|x+1|$ . Sur  $I_k$  la solution générale est  $y_k = x - 2 + \lambda_k|x+1|e^{-x}$ .

On peut recoller les solutions sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  est donc  $\mathcal{S} = \{x - 2 + \lambda(x+1)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

3. Avec la condition  $y(1) = 1$ , on obtient  $\lambda = e$ .

## Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### Solution 25

C'est la routine : on calcule les racines de l'équation caractéristique, la solution générale de l'équation homogène puis on recherche une solution particulière quitte à appliquer le théorème de superposition voire à passer sur  $\mathbb{C}$ .

1.  $-(2t^2 + 1)e^t/8 + Ae^{-t} + Be^{3t}$ ;
2.  $-te^{-2t} + Ae^{-t} + Be^{-3t}$ ;
3.  $\frac{1}{30}(2 \sin 3t - \cos 3t) + Ae^{-t} + Be^{-3t}$ ;
4.  $\frac{1}{10}(\sin t - 3 \cos t) + Ae^{-t} + Be^{-2t}$ ;
5.  $e^{-t}/9 + (A + Bt)e^{2t}$ ;
6.  $\frac{-1}{25}(3 \cos(2t) + 4 \sin(2t)) + (A + Bt)e^t$ ;
7.  $\frac{1}{18}(3t^2 - 2t)e^{-t} + Ae^{-t} + Be^{-4t}$ ;
8.  $\frac{1}{2}t \sin(t) + A \sin(t) + B \cos(t)$ ;
9.  $\frac{1}{108}(3t + 4)e^{-3t} + (A + Bt)e^{3t}$ ;
10.  $\frac{1}{8}(\cos(t) - \sin(t))e^{-t} + (A \cos(t) + B \sin(t))e^t$ .

### Solution 26

**REMARQUE.** Il importe de ne tenir compte de la condition initiale qu'après avoir exprimé la solution générale d'une équation différentielle.

1.  $(2t - 1)e^{-2t} + e^{-3t}$
2.  $\frac{(3t + 2)e^{-t} - 2e^{-4t}}{9}$

### Solution 27

Passons sur  $\mathbb{C}$  et recherchons une solution particulière de l'équation  $y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$ . Puisque les solutions de l'équation caractéristique sont  $-2 \pm i$ , il existe une solution particulière de la forme

$$f : x \mapsto axe^{(-2+i)x}.$$

On a, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((-2 + i)ax + a)e^{(-2+i)x} \\ &= ((-2 + i)^2ax + 2(-2 + i)a)e^{(-2+i)x} \end{aligned}$$

et  $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 2iae^{(-2+i)x}$ . La fonction  $f$  est donc solution si et seulement si  $a = 1/2i = -i/2$ . La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$f_0 : x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2}.$$

La solution générale de  $(\mathbf{E}_H)$  s'écrivant

$$x \mapsto [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de **(E)** sur  $\mathbb{R}$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2} + [\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)]e^{-2x}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Solution 28

► L'équation homogène **(E<sub>H</sub>)** est celle d'un oscillateur non amorti de pulsation  $\omega_0 = 2$ , ses solutions sont donc de la forme,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

► L'équation est équivalente à  $y'' + 4y = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$  et ses coefficients sont réels. Notons **(E')** l'équation suivante :  $y'' + 4y = \frac{1 - e^{2it}}{2}$ . Puisque le second membre de cette équation est la partie réelle de celui de **(E)**, la partie réelle  $\text{Re}(y_0)$  d'une solution particulière  $y_0$  de **(E')** est une solution particulière de **(E)**.

► Le second membre de **(E')** est la somme de  $\frac{1}{2}$  et de  $-\frac{1}{2}e^{2it}$ . Ainsi on utilise la méthode de la "superposition" des solutions de deux équations. Puisque  $2i$  est racine simple de l'équation caractéristique et que  $0$  n'en est pas racine, **(E')** admet une solution particulière de la forme  $y_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto a + bte^{2it}$ . Comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0''(t) + 4y_0(t) = 4a + 4ibe^{2it},$$

il suffit de poser  $a = \frac{1}{8}$  et  $b = \frac{i}{8}$  pour que  $y_0$  soit solution de **(E')**. On sait alors que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \text{Re}(y_0(t)) = \frac{1}{8} - \frac{t \sin(2t)}{8}$$

est une solution particulière de **(E)**.

► Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \text{Re}(y_0(t)) = \frac{1}{8} - \frac{t \sin(2t)}{8} + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t),$$

où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Solution 29

1. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 + t + 1 = (t - j)(t - j^2),$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = \lambda e^{jt} + \mu e^{j^2t}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

2. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 - 2it - 1 = (t - i)^2,$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = (\lambda t + \mu)e^{it}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

3. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 - it + 2 = (t - 2i)(t + i),$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = \lambda e^{2it} + \mu e^{-it}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

4. Le trinôme caractéristique de l'équation valant

$$P(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2,$$

les solutions à valeurs complexes de l'équation sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

### Solution 30

1. C'est un piège ! On *sait* qu'il existe une unique solution à un problème de Cauchy. Puisque la fonction nulle est clairement solution du premier problème, il s'agit de la solution !
2. On remarque que le trinôme caractéristique admet la racine double 3. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{3x}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . La condition initiale impose  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ . La solution du deuxième problème de Cauchy est donc la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto xe^{3x}$ .
3. Le trinôme caractéristique admet 1 et 2 pour solutions. Le second membre est du type polynôme-exponentielle; 0 n'étant pas solution du trinôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme

$$x \mapsto ax + b.$$

On aboutit à  $a = 1/2$  et  $b = 3/4$ . Les solutions de l'équation sont donc de la forme

$$x \mapsto \frac{2x + 3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le problème de Cauchy impose  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1/4$ ; son unique solution s'écrit donc

$$x \mapsto \frac{2x + 3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

4. Le trinôme caractéristique admet les racines  $j$  et  $j^2$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda e^{jt} + \mu e^{j^2 t}.$$

Cette fonction est solution du problème de Cauchy  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  si et seulement si

$$\lambda = -\mu \quad \text{et} \quad \lambda(j - j^2) = i\sqrt{3}\lambda = 1.$$

L'unique solution au problème de Cauchy étudié est donc

$$y(t) = \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{jt} - e^{j^2 t})$$

, et puisque  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (et  $j^2 = -1 - j$ ), on a

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) e^{-t/2}.$$

### Solution 31

Passons sur  $\mathbb{C}$  et recherchons une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}.$$

Puisque les solutions de l'équation caractéristique sont  $1 \pm i$ , il existe une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^{(1+i)x}.$$

On aboutit à  $a = -i/2$ . La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^x}{2}.$$

La solution générale de **(H)** s'écrivant

$$x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Les solutions de **(E)** sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^x}{2} + (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^x,$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Solution 32

Toutes les équations qui suivent admettent le même polynôme caractéristique de solutions 1 et 2. L'équation **(H)** admet donc pour solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1. Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{2x+3}{4} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Puisque 2 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^{2x}.$$

On aboutit à  $a = 1$ . Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto xe^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

3. Puisque 1 est solution simple de l'équation caractéristique, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto (ax^2 + bx)e^x.$$

On aboutit à  $a = -1/2$  et  $b = -1$ . Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -(x^2/2 + x)e^x + \lambda e^x + \mu e^{2x}.$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

4. L'équation s'écrit

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Le second membre est une superposition de fonctions du type polynôme-exponentielle. Puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique alors que  $-1$  n'en est pas racine, l'équation admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto axe^x + be^{-x}.$$

On aboutit à  $a = -1/2$  et  $b = 1/12$ . Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^x + \frac{e^{-x}}{12} + \lambda e^x + \mu e^{2x},$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Solution 33



1. On résout l'équation caractéristique  $X^2 - (1 - i)X - 2(1 + i) = 0$ . Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 8 + 6i$ . On extrait une racine carrée  $\delta$  de  $\Delta$  par la méthode algébrique. On trouve  $\delta = 3 + i$ . On en déduit les racines de l'équation  $r_1 = 2$  et  $r_2 = -1 - i$ . Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc  $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .
2. Posons  $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$ . On a donc  $f(0) = \lambda + \mu$ . De plus,  $f'(t) = 2\lambda e^{2t} - (1 + i)\mu e^{-(1+i)t}$ . On a donc  $f'(0) = 2\lambda - (1 + i)\mu$ . On résout donc le système 
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda - (1 + i)\mu = 1 \end{cases}$$
 et on trouve  $\lambda = \frac{7+i}{10}$  et  $\mu = \frac{3-i}{10}$ . La solution recherchée est donc  $f(t) = \frac{7+i}{10}e^{2t} + \frac{3-i}{10}e^{-(1+i)t}$ .

**Solution 34**

$f$  est bien évidemment solution de l'équation différentielle  $y + y'' = g$  avec  $g = f + f''$ . Comme  $(\cos, \sin)$  est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène  $y + y'' = g$ , la méthode de variation des constantes nous dit qu'une solution particulière de  $y + y'' = g$  - et notamment  $f$  - s'écrit sous la forme  $\lambda \cos + \mu \sin$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifient

$$\begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin = 0 \\ -\lambda' \sin + \mu' \cos = g \end{cases}$$

On trouve donc  $\lambda' = -g \sin$  et  $\mu' = g \cos$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) + f(x + \pi) &= \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x) + \lambda(x + \pi) \cos(x + \pi) + \mu(x + \pi) \sin(x + \pi) \\ &= \cos(x) [\lambda(x) - \lambda(x + \pi)] + \sin(x) [\mu(x) - \mu(x + \pi)] \\ &= -\cos(x) \int_x^{x+\pi} \lambda'(t) dt - \sin(x) \int_x^{x+\pi} \mu'(t) dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t) (\sin(t) \cos(x) - \sin(x) \cos(t)) dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t) \sin(t - x) dt \\ &= \int_0^\pi g(x + t) \sin(t) dt \geq 0 \text{ car } g \geq 0 \text{ et } \sin \geq 0 \text{ sur } [0, \pi] \end{aligned}$$

**Solution 35**

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$(\mathbf{E}_H) : y'' - 4y' + 5y = 0$$

est

$$X^2 - 4X + 5 = 0$$

Les racines de cette équation sont  $2 + i$  et  $2 - i$ . On en déduit que les solutions de  $(\mathbf{E}_H)$  sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{2x}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

2. On passe en complexes, autrement dit on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}_C) : y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x}$$

On cherche une solution particulière de la forme  $x \mapsto P(x)e^{(2+i)x}$  où  $P$  est un polynôme à coefficients complexes. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) + 2iP'(x) = 1$$

Il suffit donc de prendre  $P(x) = \frac{1}{2i}x = -\frac{i}{2}x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Une solution particulière de  $(\mathbf{E}_C)$  est donc

$$x \mapsto -\frac{i}{2}x e^{(2+i)x}$$

Une solution particulière de (E) est donc la partie imaginaire de cette dernière fonction. Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x} = -\frac{i}{2}xe^{2x}(\cos x + i \sin x) = \frac{1}{2}xe^{2x} \sin x - \frac{i}{2}xe^{2x} \cos x$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x} \cos x$$

3. D'après les deux premières questions, les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x} \cos x + (\lambda \cos x + \mu \sin x) e^{2x}$$

ou encore

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x\right) e^{2x}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

4. Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x\right) e^{2x}$$

On a ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos x - x \sin x + \frac{1}{2}x \sin x - \lambda \sin x + \mu \cos x + 2\lambda \cos x + 2\mu \sin x\right) e^{2x}$$

Le système  $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$  équivaut alors à

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\frac{1}{2} + \mu + 2\lambda = 2 \end{cases}$$

et donc  $\lambda = 1$  et  $\mu = \frac{1}{2}$ . Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) e^{2x}$$

### Solution 36

1. A l'aide d'une formule de trigonométrie et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt$$

Les applications  $x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t) dt$  et  $x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t) dt$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  comme primitives de fonctions continues. Comme  $\sin$  et  $\cos$  sont également de classe  $\mathcal{C}^1$ , on en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt + \sin(x) \cos(x)g(x) + \sin(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt - \cos(x) \sin(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t)) g(t) dt = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt \end{aligned}$$

2. On a montré à la question précédente que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt$$

On démontre comme à la première question que  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  i.e. que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt + \cos^2(x)g(x) + \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt + \sin^2(x)g(x) \\ &= -\int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t))g(t) dt + g(x) = -f'(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $f$  est bien solution de  $y'' + y = g$ .

3. La solution générale de l'équation homogène  $y'' + y = 0$  est  $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  est une solution particulière de  $y'' + y = g$ , on en déduit que les solutions de  $y'' + y = g$  sont  $x \mapsto f(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Solution 37

1. La fonction  $z$  est dérivable par définition de la dérivabilité des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes. De plus, le système est équivalent à l'équation

$$z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t}.$$

2. Il faut distinguer deux cas...

- *Premier cas*,  $\omega \neq 1$  : l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \mapsto ae^{i\omega t}.$$

On obtient  $a = 1/(1 - \omega)$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{1 - \omega} + \lambda e^{it},$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Posons  $\lambda = \alpha - i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Les solutions  $x, y$  sont les fonctions de la forme

$$x : t \mapsto \frac{\cos(\omega t)}{1 - \omega} + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t),$$

et

$$y : t \mapsto \frac{\cos(\omega t)}{1 - \omega} - \beta \cos(t) + \alpha \sin(t),$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- *Second cas*,  $\omega = 1$  : l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \mapsto ate^{it}.$$

On obtient  $a = -i$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto -ite^{i\omega t} + \lambda e^{it},$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Posons  $\lambda = \alpha - i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Les solutions  $x, y$  sont les fonctions de la forme

$$x : t \mapsto t \sin(t) + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t),$$

et

$$y : t \mapsto -t \cos(t) - \beta \cos(t) + \alpha \sin(t),$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## Changement de fonction ou de variable

### Solution 38

Résolution sur  $]0, +\infty[$ .

1. Un changement de variable.

- a. On a, d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, que  $Y = y \circ \exp$  est dérivable sur  $I$  et que  $Y'(t) = e^t y'(e^t)$ . De même,  $Y'$  est dérivable sur  $I$  et l'on a

$$Y''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

On en déduit que

$$y'(e^t) = e^{-t} Y'(t) \quad \text{et} \quad y''(e^t) = e^{-2t} (Y''(t) - Y'(t)).$$

- b. Soit  $x > 0$ , posons  $t = \ln(x)$ , ie  $x = e^t$ . Comme

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) &= e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) \\ &= Y''(t) - Y'(t) + 3Y'(t) + Y(t) \\ &= Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) \end{aligned}$$

Ainsi,  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si  $Y$  est solution sur  $\mathbb{R}$  (image de  $I$  par la fonction  $\ln$ ) de l'équation  $(E')$  :  $Y'' + 2Y' + Y = e^{-2t}$ .

2. Comme les solutions de  $(E'_H)$  sont de la forme

$$t \mapsto (At + B)e^{-t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R},$$

on sait d'après le cours que  $(E')$  admet une solution particulière de la forme  $t \mapsto ae^{-2t}$ . Après tout calcul, on trouve  $a = 1$ . Les solutions de  $(E')$  sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-2t} + (At + B)e^{-t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

3. Comme  $t = \ln(x)$ , on en déduit les solutions de  $(E)$  sur  $I$  :

$$x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{A \ln(x) + B}{x}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

4. C'est immédiat, la condition initiale  $(y(1), y'(1)) = (0, 0)$  impose les constantes précédentes  $(A, B) = (1, -1)$  et l'on trouve donc

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

### Solution 39

Soit  $y$  une solution de l'équation sur un intervalle  $I$ . Alors la fonction  $z = y^2$  est dérivable sur  $I$  et sur cet intervalle

$$z' = 2yy',$$

ainsi  $z$  est solution sur  $I$  de l'équation

$$z' - z = -x^2.$$

Recherchons une solution particulière de cette équation sous la forme

$$x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

On obtient  $a = 1$  et  $b = c = 2$ . Les solutions de l'équation linéaire sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x.$$

Ainsi,  $y$  est sur  $I$  de la forme

$$x \mapsto \pm \sqrt{x^2 + 2x + 2 + \alpha e^x}.$$

Réciproquement, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , puisque le trinôme  $x^2 + 2x + 2$  est strictement positif, la fonction définie par la formule précédente est définie sur une réunion d'intervalle(s) ouverts sur le(s)quel(s) elle est dérivable et vérifie l'équation initiale.

**Solution 40**

Soit  $y$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Posons  $z = e^{-y}$ . La fonction  $z$  est dérivable sur  $I$  et sur cet intervalle,  $z' = -y'e^{-y}$ . La fonction  $y$  vérifie l'équation de l'énoncé si et seulement si  $z$  vérifie

$$z' = -e^x,$$

ie si et seulement si il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$e^{-y} = z = -e^x + \alpha,$$

ce qui impose  $\alpha > 0, I \subset ]-\infty, \ln(\alpha)[$  et

$$\forall x \in I, y(x) = -\ln(\alpha - e^x).$$

**Solution 41**

1. Recherchons le degré  $n$  d'une éventuelle solution polynomiale  $p$  de (E) : si on écrit

$$p(x) = p_n x^n + \dots + p_0,$$

$(t^2 + 1)p'' - 2p$  est un polynôme de degré au plus  $n$  et son monôme en  $t^n$  vaut  $p_n[n(n-1) - 2]t^n$ . Si  $p$  est solution de l'équation ce terme est nécessairement nul et, puisque  $p_n \neq 0$ ,  $n(n-1) = 2$ , c'est-à-dire  $n = 2$ .

2. On recherche donc une solution de l'équation de la forme  $p(t) = t^2 + c$ . On obtient sans peine  $c = 1$ .

3. Puis que  $p$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , on peut poser  $z = y/p$  et  $z$  est deux fois dérivable d'après le théorème de dérivation d'un quotient.

4. On reprend les notations précédentes. On a

$$y' = p'z + pz' \text{ et } y'' = p''z + 2p'z' + pz''$$

d'où :

$$\begin{aligned} py'' - 2y &= p(p''z + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p(2y + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p^2z'' + 2p'pz' \\ &= p[pz'' + 2p'z'] \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $p$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ ,  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $Z = z'$  est solution de l'équation

$$(E') : (1 + t^2)Z' + 4tZ = 0.$$

5. Puisque

$$\int \frac{4t}{1+t^2} dt = 2 \ln(1+t^2),$$

les solution de l'équation homogène associée à (E') sont de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{k}{(1+t^2)^2}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

6. D'après les questions précédentes, il s'agit de calculer :

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Commençons par intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{1+t^2} &= \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{(t^2+1-1)dt}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} &= \frac{t}{t^2 + 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{t}{t^2 + 1} + \arctan(t) \end{aligned}$$

et donc :

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan(t).$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto k_1 \left( \frac{t}{2} + \frac{t^2 + 1}{2} \arctan(t) \right) + k_2(1 + t^2)$$

avec  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

### Solution 42

1. Soit  $y : I \mapsto \mathbb{R}$  une fonction dérivable ne s'annulant pas sur  $I$ . Alors la fonction  $z = \frac{1}{y}$  est dérivable sur  $I$  et l'on a,

$$y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

La fonction  $y$  est donc solution de (E) si et seulement si

$$t^2 \frac{z'}{z^2} + \frac{t}{z} = \frac{1}{z^2},$$

ie  $t^2 z' + tz = 1$ .

2. L'équation homogène associée à (E') est  $z' + \frac{1}{t}z = 0$ . Puisque  $\int \frac{dt}{t} = \ln(t)$  sur  $I$ , ses solutions sont exactement les fonctions de la forme

$$t > 1 \mapsto \frac{\lambda}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante pour résoudre (E'). Les solutions de cette équation sont de la forme

$$t > 1 \mapsto \frac{\lambda(t)}{t}$$

avec  $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$  dérivable vérifiant  $\frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{1}{t^2}$ , ie  $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$ . Les solutions de l'équation (E') sont donc les fonctions de la forme,

$$t > 1 \mapsto \frac{\ln(t) + \lambda}{t}.$$

3. Puisque la solution générale de E',

$$t > 1 \mapsto \frac{\ln(t) + \lambda}{t},$$

s'annule sur  $I$  si et seulement si  $\lambda < 0$ , les solutions de E sont les fonctions de la forme

$$t > 1 \mapsto \frac{t}{\ln(t) + \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

### Solution 43

1. a. Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = g(\ln x)$ .  
Ainsi  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned} & f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 f''(x) - x f'(x) - 3f(x) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 \left( \frac{g''(\ln x)}{x^2} - \frac{g'(\ln x)}{x^2} \right) - x \frac{g'(\ln x)}{x} - 3g(\ln x) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g''(\ln x) - 2g'(\ln x) - 3g(\ln x) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R} \quad g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\ \Leftrightarrow & g \text{ solution de (E')} \end{aligned}$$

avec

$$(E') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

- b. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E') sont les fonctions  $t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Une solution particulière de (E') est  $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$ . Les solutions de (E') sont donc les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  
Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

2. a. Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = g(\ln(-x))$ .  
Ainsi  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned} & f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 f''(x) - x f'(x) - 3f(x) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 \left( \frac{g''(\ln(-x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(-x))}{x^2} \right) - x \frac{g'(\ln(-x))}{x} - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g''(\ln(-x)) - 2g'(\ln(-x)) - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R} \quad g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\ \Leftrightarrow & g \text{ solution de (E')} \end{aligned}$$

avec

$$(E') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

- b. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E') sont les fonctions  $t \mapsto \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Une solution particulière de (E') est  $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$ . Les solutions de (E') sont donc les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .  
Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

3. Soit  $f$  une éventuelle solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$  tel que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$

$f$  doit être continue en 0 et en particulier doit avoir une limite finie en 0, ce qui impose  $\mu = \beta = 0$ . On a donc alors  $f(0) = 0$ .  
Réciproquement, toute fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec  $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$  est bien solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .  
De plus  $f$  est bien deux fois dérivable en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 0$$

et on a donc  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

Enfin

$$0^2 f''(0) - 0 f'(0) - 3 f(0) = 0^4$$

ce qui prouve que  $f$  est bien solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

En conclusion, les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$  sont donc les fonctions  $f$  définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec  $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ .

## Equations fonctionnelles

### Solution 44

1. Soit  $f \in S_\alpha$ . La fonction  $g : x \mapsto f(\alpha - x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Comme  $f' = -g$ ,  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Soit  $f \in S_\alpha$ . En dérivant l'identité  $f'(x) = -f(\alpha - x)$  – ce qui est licite car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  – on obtient  $f''(x) = f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Toute fonction de  $S_\alpha$  est donc du type  $x \mapsto \lambda \cos(x + \varphi)$  où  $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \lambda \cos(x + \varphi)$ . Alors  $f \in S_\alpha$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(\alpha - x)$  i.e.  $-\lambda \sin(x + \varphi) = -\lambda \cos(\alpha - x + \varphi)$ .  
Si  $\lambda = 0$ , cette condition est évidemment vérifiée et  $f$  est la fonction nulle.  
Supposons  $\lambda \neq 0$ . Alors  $f \in S_\alpha$  si et seulement si  $\sin(x + \varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Or

$$\sin(x + \varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = \sin(x + \varphi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \alpha - \varphi\right) = 2 \sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Comme  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$  prend des valeurs non nulles lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $f \in S_\alpha$  si et seulement si  $\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  i.e.  $\varphi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$ .

Les éléments de  $S_\alpha$  sont donc les fonctions du type  $x \mapsto \lambda \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi\right)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  (ceci inclut le cas de la fonction nulle). Or  $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos \theta$ , on peut donc faire disparaître le  $k\pi$  en faisant rentrer le  $(-1)^k$  dans la constante multiplicative  $\lambda$  : les éléments de  $S_\alpha$  sont plus simplement les fonctions du type  $x \mapsto \lambda \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 45

Soit  $f$  une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors  $f'$  est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f = \lambda \cos + \mu \sin$ .

Réciproquement, soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et posons  $f = \lambda \cos + \mu \sin$ .  $f$  est bien dérivable. De plus,  $f$  vérifie la relation de l'énoncé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \lambda \cos(-x) + \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mu - \lambda) \sin(x) + (\mu - \lambda) \cos(x) = 0$$

La condition  $\lambda = \mu$  est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant  $x = 0$  dans la dernière relation.

On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions  $\lambda(\cos + \sin)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 46

Soit  $f$  une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors  $f'$  est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f'(-x) = -f(x)$$



Ainsi  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ . Il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f = \lambda \cos + \mu \sin$ . Réciproquement, soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et posons  $f = \lambda \cos + \mu \sin$ .  $f$  est bien dérivable. De plus,  $f$  vérifie la relation de l'énoncé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = -\lambda \cos(-x) - \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mu + \lambda) \cos(x) - (\mu + \lambda) \sin(x) = 0$$

La condition  $\mu = -\lambda$  est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant  $x = 0$  dans la dernière relation. On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions  $\lambda(\cos - \sin)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 47

Remarquons que toute solution  $f$  de l'équation est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  puisqu'alors  $f'$  est la somme de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a alors,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(-x) + (1-x)e^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} - xe^x \end{aligned}$$

Toute solution  $f$  est donc solution de l'équation

$$y'' + y = (1-x)e^{-x} - xe^x,$$

Cette dernière a un second membre qui est la superposition de fonctions du type polynôme-exponentielle, elle admet une solution particulière de la forme

$$x \mapsto (ax + b)e^{-x} + (cx + d)e^x.$$

On obtient  $a = -1/2, b = 0$  et  $c = -1/2, d = 1/2$ . La fonction  $f$  est donc de la forme

$$x \mapsto -\frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^x + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Réciproquement, une telle fonction est solution de l'équation initiale si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu) \cos(x) = (\lambda + \mu) \sin(x),$$

ainsi, nécessairement, en testant la valeur  $x = 0$  ci-dessus,  $\lambda = -\mu = 0$ . Cette condition étant clairement suffisante, l'équation admet une infinité de solutions, les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto -\frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^x + \lambda(\cos(x) - \sin(x))$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 48

Soit  $f$  une solution de l'équation. Posons  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= f(x) + x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \end{aligned}$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto xf(x)$ . De même

$$x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto f(x)$ . Ainsi  $g$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + xf(x) + \int_0^x f(t)dt - xf(x) \\ &= f'(x) + \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

La fonction  $g'$  est à son tour dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  réel,

$$g''(x) = f''(x) + f(x).$$

Si  $f$  est solution de l'équation, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = 0$$

puisque dans ce cas la fonction  $g$  est constante égale à 1. Il existe alors deux réels  $a, b$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Réciproquement, soit  $f_{a,b}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_{a,b}(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Posons  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$g_{a,b}(x) = f_{a,b}(x) + \int_0^x (x-t)f_{a,b}(t)dt.$$

La fonction  $g_{a,b}$  est dérivable d'après le même argument que précédemment et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g'_{a,b}(x) &= f'_{a,b}(x) + \int_0^x f_{a,b}(t)dt \\ &= b - b \cos(x) + a \sin(x) + b \cos(x) - a \sin(x) \\ &= b \end{aligned}$$

La fonction  $f_{a,b}$  est donc solution si et seulement si  $b = 0$  et  $f_{a,b}(0) = 1$ , c'est-à-dire  $b = 0$  et  $a = 1$ . L'unique solution de l'équation étudiée est donc la fonction cosinus.

## Problèmes de raccord

### Solution 49

On trouve sans difficulté que les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Soit  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$  tels que  $y(x) = \lambda_+ e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$  et  $y(x) = \lambda_- e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x < 0$ .

$y$  doit être continue en 0, ce qui impose  $\lambda_-$  (sinon  $y$  admet une limite infinie en  $0^-$ ). Ceci impose de plus  $y(0) = 0$  puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ .

Réciproquement soit  $y$  telle que  $y(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $y(x) = \lambda e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$y$  est bien solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \lambda u e^{-u} = 0$$

Ainsi  $y$  est dérivable en 0 et  $y'(0) = 0$ . Enfin,  $0^2 y'(0) - y(0) = 0$  donc  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ .

En conclusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions  $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 50

Résolvons tout d'abord sur un intervalle  $I_k = ]k\pi, (k+1)\pi[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'équation homogène peut s'écrire  $y' - y \cot x = 0$ . Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type  $x \mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|}$  où encore  $x \mapsto \lambda \sin x$  (en faisant «rentrer» la valeur absolue dans la constante).

On remarque que  $\cos$  est solution particulière de l'équation avec second membre (on peut également utiliser la variation de la constante si la solution ne saute pas aux yeux).

Les solutions sur  $I_k$  sont donc les fonctions  $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$ .

Soit  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Il existe une famille  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de réels telle que  $y(x) = \cos x + \lambda_k \sin x$  pour  $x \in I_k$ .  
 $y$  doit être continue en les  $k\pi$ , ce qui impose  $y(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ .

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} \frac{y(x) - y(k\pi)}{x - k\pi} = (-1)^k \lambda_{k-1}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \frac{y(x) - y(k\pi)}{x - k\pi} = (-1)^k \lambda_k$$

Comme  $y$  doit être dérivable en  $k\pi$ , on a donc  $\lambda_{k-1} = \lambda_k$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $y(x) = \cos x + \lambda \sin x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, les fonctions  $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont bien solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle.

En conclusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions  $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Solution 51

Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'équation homogène peut s'écrire  $y' - \frac{1}{x}y = 0$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\ln x}$  ou encore les fonctions  $x \mapsto \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La variation de la constante fournit la solution particulière  $x \mapsto x \ln x$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions  $x \mapsto x \ln x + \lambda x$ .

Le même raisonnement prouve que les solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions  $x \mapsto x \ln(-x) + \lambda x$ .

Soit  $y$  une éventuelle solution sur  $\mathbb{R}$ . Ce qui précède justifie l'existence de deux constantes réelles  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  telles que  $y(x) = \begin{cases} x \ln x + \lambda_+ x & \text{si } x > 0 \\ x \ln(-x) + \lambda_- x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$y$  est nécessairement continue en 0, ce qui impose  $y(0) = 0$ . Mais alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = -\infty$$

$y$  n'est donc pas dérivable en 0.

On en conclut qu'il n'existe pas de solution sur  $\mathbb{R}$  à l'équation différentielle de l'énoncé.

### Solution 52

1. Posons  $z(t) = y(x) = y(\sqrt{t})$ .  $z$  est bien deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $y(x) = z(x^2)$  et donc  $y'(x) = 2xz'(x^2)$  et  $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $4z'' - z = 0$ . Comme les solutions de  $4z'' - z = 0$  sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{2}} + \mu e^{-\frac{x}{2}}$ , les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

2. On remarque que  $y$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  si et seulement si  $x \mapsto y(-x)$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc également les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

3. Soit  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Ce qui précède montre qu'il existe des constantes réelles  $\lambda_+, \mu_+, \lambda_-, \mu_-$  telles que  $y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La continuité de  $y$  en 0 impose  $\lambda_+ + \mu_+ = \lambda_- + \mu_-$ .

On a  $y'(x) = \begin{cases} x\lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ x\lambda_- e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lambda_+ - \mu_+$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lambda_- - \mu_-$$

Comme  $y'$  est dérivable en 0,  $\lambda_+ - \mu_+ = \lambda_- - \mu_-$ .

On en déduit que  $\lambda_+ = \lambda_-$  et  $\mu_+ = \mu_-$ .

Réciproquement, les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  sont bien solutions de (E). Ce sont donc exactement les solutions de (E).

**Solution 53**

Le coefficient de  $y'$  pouvant s'annuler, on parle d'équation différentielle *non normalisée*.

On résout donc dans un premier temps sur les plus grands intervalles sur lesquels ce coefficient ne s'annule pas, en l'occurrence  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .

**Résolution sur  $\mathbb{R}_+^*$**

L'équation (E) équivaut alors à  $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{e^{2t}}{t}$ .

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions  $t \mapsto \lambda \frac{e^t}{t}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La méthode de variation de la constante fournit  $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t}$  comme solution particulière.

Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \lambda \frac{e^t}{t}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Résolution sur  $\mathbb{R}_-^*$**  Le même raisonnement montre que les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont également les fonctions  $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \mu \frac{e^t}{t}$  où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**Résolution sur  $\mathbb{R}$**

Soit  $y$  une éventuelle solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  : il existe donc  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{t} + \lambda \frac{e^t}{t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{e^{2t}}{t} + \mu \frac{e^t}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

**Etude de la continuité en 0**

$y$  doit être continue en 0. Elle doit donc avoir la même limite finie à gauche et à droite en 0. Or pour  $t > 0$

$$y(t) = \frac{e^t(e^t + \lambda)}{t}$$

Pour que  $y$  ait une limite finie à droite en 0, il faut donc que  $\lambda = -1$ . De même, pour que  $y$  ait une limite finie à gauche en 0, il faut également que  $\mu = -1$ . Supposons dorénavant ces conditions vérifiées.

On prouve que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t(e^t - 1)}{t} = 1$  en utilisant par exemple les développements limités. La continuité de  $y$  en 0 implique donc  $y(0) = 1$ .

**Étude de la dérivabilité en 0**

On a donc  $y(t) = \begin{cases} \frac{e^t(e^t - 1)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ . On prouve finalement que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \frac{3}{2}$ , ce qui prouve que  $y$  est dérivable en 0.

**Conclusion**  $y$  est donc solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ . De plus, elle est dérivable en 0 et  $0 \times y'(0) + (1 - 0) \times y(0) = 1 = e^{2 \times 0}$  donc  $y$  est bien l'unique solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Equations différentielles non linéaires****Solution 54**

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = a|f(x)| \geq 0$  donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Supposons que  $f$  ne soit pas de signe constant sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle y est également continue et donc elle s'annule en un réel  $x_0$  via le théorème des valeurs intermédiaires. Par croissance de  $f$ ,  $f$  est positive sur  $[x_0, +\infty[$ . Ainsi  $f' = af$  sur  $[x_0, +\infty[$ .  
Finalement,  $f$  est solution du problème de Cauchy  $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$  sur l'intervalle  $[x_0, +\infty[$ . Ainsi  $f$  est nulle sur  $[x_0, +\infty[$ .  
De la même manière,  $f$  est négative sur  $] - \infty, x_0]$  donc  $f$  est solution du problème de Cauchy  $\begin{cases} y' = -ay \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$  sur l'intervalle  $] - \infty, x_0]$ .  $f$  est également nulle sur  $] - \infty, x_0]$ .  
Finalement,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .
- Supposons que  $f$  ne soit pas constamment nulle sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$ .  
Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est solution de  $y' = ay$  et il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda e^{ax}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $f$  est positive et non constamment nulle,  $\lambda > 0$ .  
De même, si  $f$  est négative, il existe  $\lambda < 0$  tel que  $f(x) = \lambda e^{-ax}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle, les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{ax}$  avec  $\lambda > 0$  et les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{-ax}$  avec  $\lambda < 0$  sont bien

solutions de (E).

Finalement l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto \lambda e^{ax}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{x \mapsto -\lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$$

## Solution 55

1. Soit  $y$  une solution de  $(E_1)$ . Alors  $y' \geq 0$  donc  $y$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Supposons que  $y$  s'annule en un réel  $t_0$ . Alors  $y$  est positive sur  $[t_0, +\infty[$  et négative sur  $] -\infty, t_0]$ . On en déduit que  $y' = y$  sur  $[t_0, +\infty[$  et  $y' = -y$  sur  $] -\infty, t_0]$ . Par conséquent,  $y(t) = y(t_0)e^{t-t_0}$  pour  $t \in [t_0, +\infty[$  et  $y(t) = y(t_0)e^{t_0-t}$  pour  $t \in ] -\infty, t_0]$ . Mais comme  $y(t_0) = 0$ ,  $y$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .
- Supposons que  $y$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Etant continue, elle y reste de signe constant.
  - Si  $y$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y' = y$  sur  $\mathbb{R}$  donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = Ce^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $y$  est strictement positive,  $C > 0$ .
  - Si  $y$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y' = -y$  sur  $\mathbb{R}$  donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = Ce^{-t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $y$  est strictement négative,  $C < 0$ .

Réciproquement, la fonction nulle, les fonctions  $t \mapsto Ce^t$  avec  $C \in \mathbb{R}_+^*$  et  $t \mapsto Ce^{-t}$  avec  $C \in \mathbb{R}_-^*$  sont bien solutions de  $(E_1)$ .

2. Soit  $y$  une solution de  $(E_2)$  (que l'on va supposer de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Remarquons qu'alors  $y$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

- Si  $y'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , alors elle y est de signe constant.
  - Si  $y'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y' = y$  sur  $\mathbb{R}$  et il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = Ce^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $y$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $C > 0$ .
  - Si  $y'$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y' = -y$  sur  $\mathbb{R}$  et il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = Ce^{-t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $y$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $C > 0$ .
- Supposons que  $y'$  s'annule en un réel  $t_0$  (et donc  $y$  également). Comme  $y = |y'|$ ,  $y \geq y'$  et  $y \geq -y'$ . Ceci impose que les fonctions  $z_1 : t \mapsto y(t)e^{t_0-t}$  et  $z_2 : t \mapsto y(t)e^{t-t_0}$  sont de dérivées respectivement négatives et positives. Ainsi  $z_1$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Notamment, pour  $t \geq t_0$ ,  $z_1(t) \leq z_1(t_0) = 0$  puis  $y(t) \leq 0$  et enfin  $y(t) = 0$  car  $y$  est positive. De même,  $z_2$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc pour  $t \leq t_0$ ,  $z_2(t) \leq z_2(t_0) = 0$  puis  $y(t) = 0$  par les mêmes arguments que précédemment. Finalement,  $y$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .

Réciproquement, la fonction nulle, les fonctions  $t \mapsto Ce^t$  et  $t \mapsto Ce^{-t}$  avec  $C \in \mathbb{R}_+^*$  sont bien solutions de  $(E_2)$ .

**REMARQUE.** Il n'était pas nécessaire de supposer  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . En effet, d'après le théorème de Darboux,  $y'$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans être nécessairement continue. Ainsi, si  $y'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , elle y reste de signe constant.