Espaces préhilbertiens réels

Produits scalaires

Solution 1

1. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- Soit $P \in E$. On a
$$\langle P|P\rangle = P^2(x_0) + \ldots + P^2(x_n) \geqslant 0,$$
la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls , on a
$$\langle P|P\rangle = P^2(x_0) + \cdots + P^2(x_n) = 0$$
si et seulement si $x_0, \ldots, x_n$ sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à n et que les x_k sont deux à deux distincts , cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

2. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation des polynômes et par linéarité de l'évaluation.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- Soit $P \in E$. On a
$$\langle P|P\rangle = P^2(a_0) + \ldots + (P^{(n)})^2(a_n) \geqslant 0,$$
la forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Soit $P \in E$ tel que
$$\langle P|P\rangle = P^2(a_0) + \ldots + (P^{(n)})^2(a_n) = 0.$$
Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls, on a $(P^{(n)})^2(a_n) = 0$. Puisque P est de degré inférieur à n, $P^{(n)}$ est une constante , qui est donc nulle d'après l'égalité précédente. P est donc de degré inférieur à $n-1$, et puisque
$$(P^{(n-1)})^2(a_{n-1}) = 0,$$
on en déduit que la constante $P^{(n-1)}$ est nulle et donc que P est de degré inférieur à $n-2$. Par une récurrence descendante immédiate, on prouve que $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

3. Prouvons que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $P \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a
$$\langle P|P\rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geqslant 0.$$
La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot)$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle P|P\rangle = 0$ est équivalente à
$$\int_0^1 P^2(t)dt = 0.$$
La fonction P^2 étant continue et positive , la condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle|\rangle$ est donc définie.

4. Prouvons que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.

- Soient $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\langle A|\lambda B + C\rangle &= \operatorname{tr}(A^\top(\lambda B + C)) = \operatorname{tr}(\lambda A^\top B + A^\top C)\\ &\qquad \text{(par linéarité de la transposition)}\\ &= \lambda \operatorname{tr}(A^\top B) + \operatorname{tr}(A^\top C)\\ &\qquad \text{(par linéarité de la trace)}\\ &= \lambda\langle A|B\rangle + \langle A|C\rangle\end{aligned}$$

  L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc linéaire à droite.
- Soient $A, B \in E$. On a

$$\langle B|A\rangle = \operatorname{tr}(B^\top A) = \operatorname{tr}((A^\top B)^\top) = \operatorname{tr}(A^\top B) = \langle A|B\rangle$$

  L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique donc linéaire à gauche puisqu'elle est linéaire à droite.
- Pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$(A^\top A)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2.$$

  On a donc

$$\langle A|A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$

  La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc positive.
- Puisque sur $\mathbb{R}$, une somme de carrés est nulle si et seulement si tous les carrés sont nuls, on a, d'après le calcul précédent, $\langle A|A\rangle = 0$ si et seulement si $\forall 1 \leqslant k, i \leqslant n$, $a_{k,i} = 0$, ie $A = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

5. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale , on a

$$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$

  La forme bilinéaire $\langle\,|\,\rangle$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ *implique*

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t)dt = 0.$$

  La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc définie.

6. Prouvons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

- *Symétrie* : pour tous f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}\langle f|g\rangle &= \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt\\ &= \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t))dt\\ &= \langle g|f\rangle\end{aligned}$$

  par commutativité du produit sur le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- *Linéarité* : pour tous f, g et h dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\langle f + \lambda g | h \rangle &= \int_0^1 ((f + \lambda g)(t)h(t) + (f + \lambda g)'(t)h'(t))dt \\ &= \int_0^1 (f(t)h(t) + \lambda g(t)h(t) + f'(t)h'(t) \\ &\qquad + \lambda g'(t)h'(t)) \\ &= \int_0^1 (f(t)h(t) + f'(t)h'(t))dt \\ &\qquad + \lambda \int_0^1 (g(t)h(t) + g'(t)h'(t))dt \\ &= \langle f|h \rangle + \lambda \langle g|h \rangle\end{aligned}$$

  par linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégrale. Ainsi, $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est linéaire à gauche donc bilinéaire sur E par symétrie.
- *Positivité* : pour tout f dans E, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t))dt \geqslant 0$$

  par positivité de l'intégrale puisque $f^2 + (f')^2 \geqslant 0$.
- *Caractère défini* : pour tout f dans E, on a

$$\langle f|f \rangle = \int_0^1 (f^2(t) + (f')^2(t))dt = 0$$

  si et seulement si $f^2 + (f')^2 = 0$ car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Ceci équivaut à

$$f^2 = (f')^2 = 0,$$

  ie $f = 0$.

Inégalités

Solution 2

---

1. Prouvons que $\langle \cdot|\cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de la dérivation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $f \in$ E. Par positivité de l'intégrale , on a

$$(f|f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$

  La forme bilinéaire $\langle \, | \, \rangle$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f \rangle = 0$ *implique*

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t)dt = 0.$$

  La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et finalement nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$ est donc définie.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions de E définies par

$$f \in \mathrm{E},\ g : t \in [0,1] \longmapsto t.$$

Puisque

$$\langle f|g\rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t)dt,$$

puis

$$\|f\|^2 = f^2(1) + \int_0^1 f^2(t)dt$$

et finalement

$$\|g\|^2 = 1 + 1 = 2,$$

l'inégalité s'écrit

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right).$$

Solution 3

---

1. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|y\|2}.\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2 &= \frac{\|x^2\| - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\ &= \frac{1}{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} + \frac{1}{\|x\|2}.\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

2. Remarquons tout d'abord que l'inégalité est évidente si deux des vecteurs a, b, c, d sont égaux. On les suppose maintenant deux à deux distincts. Soient $x, y, z \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$. L'inégalité triangulaire donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$$

qui devient en utilisant la première question :

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\|\|z\|} + \frac{\|z - y\|}{\|z\|\|y\|}.$$

En multipliant par $\|x\|\|y\|\|z\|$, on obtient :

$$\|z\|\|x - y\| \leq \|y\|\|x - z\| + \|x\|\|z - y\|.$$

En posant $x = b - a$, $y = d - a$ et $z = c - a$, on obtient le résultat voulu.

Solution 4

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ et l'inégalité est trivialement vérifiée.
Sinon, on peut orthonormaliser la famille $(x_1, \dots, x_n)$ en une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Notons M la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et R la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc $\mathrm{M} = \mathrm{QR}$ puis $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{Q})\det(\mathrm{R})$. Puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, Q est orthogonale et donc $\det(\mathrm{Q}) = \pm 1$. De plus,

par procédé de Gram-Schmidt, la matrice R est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\langle x_1, e_1\rangle$, …, $\langle x_n, e_n\rangle$. On en déduit que

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i\rangle$$

puis par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\|e_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Solution 5

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = 1 \quad , \quad b_k = \frac{1}{k},$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Solution 6

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux

$$a_k = \sqrt{x_k} \ , \ b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}},$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

Solution 7

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels

$$a_k = \sqrt{k} \ , \ b_k = \frac{\sqrt{k}}{n-k} \ , \ 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}},$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

d'où le résultat.

Solution 8

D'après-Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 = (b-a)^2$$

Donc la borne inférieure de l'énoncé existe. Elle est atteint si $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires : il suffit par exemple de prendre $f = 1$ sur $[a, b]$.

Solution 9

On a
$$\forall t \in [a,b],\quad f(t) = \int_a^t f'(u)du.$$
Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient
$$f^2(t) \leqslant \left(\int_a^t du\right)\left(\int_a^t f'^2(u)du\right),$$
soit
$$f^2(t) \leqslant (t-a)\int_a^t f'^2(u)du.$$
Comme $f'^2 \geqslant 0$ et $a \leqslant t \leqslant b$, on a
$$\int_a^t f'^2(u)du \leqslant \int_a^b f'^2(u)du$$
d'où
$$\forall t \in [a,b],\quad f^2(t) \leqslant (t-a)\int_a^b f'^2(u)du,$$
puis, par positivité de l'intégrale,
$$\int_a^b f^2(t)dt \leqslant \left(\int_a^b (t-a)dt\right)\int_a^b f'^2(u)du$$
et donc
$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du.$$

Bases orthonormales

Solution 10

1. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. u transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe donc u est une isométrie vectorielle directe donc $\det(u) = 1$. Or $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
2. On a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}}$. Donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}$.

   Remarque. On en déduit que le déterminant dans une base orthonormée directe ne dépend pas du choix de cette base. Le déterminant de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans une base orthonormée quelconque s'appelle le *produit mixte* de ces vecteurs et est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

3. Cette application est linéaire car le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables et notamment par rapport à la dernière. De plus, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire.
4. C'est tout simplement le théorème de Riesz.
5. Démontrons simplement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$, $x_1' \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x_1', x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1', x_2, \dots, x_n)$$
   Notons $u = (\lambda x_1 + \mu x_1') \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$, $v = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $w = x_1' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u, x\rangle = \lambda\langle v, x\rangle + \mu\langle w, x\rangle$ i.e. $\langle u - (\lambda v + \mu w), x\rangle = 0$. Donc $u - (\lambda v + \mu w) \in \mathrm{E}^\perp = \{0\}$. On a donc $u = \lambda v + \mu w$, ce qui prouve bien la linéarité par rapport à la première variable. La linéarité par rapport aux autres variables se traite de la même manière.
   Soient $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{E}$ tels que deux vecteurs parmi ceux-ci soient égaux. On a donc $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puisque le déterminant est une forme multilinéaire alternée. Ceci signifie que $\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}, x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Ainsi $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$. L'application de l'énoncé est bien alternée.

Solution 11

1. L'application $\langle .,. \rangle$ est clairement symétrique. Elle est bilinéaire puisque la dérivation et l'évaluation en a sont linéaires. Elle est évidemment positive. Soit enfin $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a donc $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n)}(a) = 0$. Ainsi a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P et $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.

2. La famille $\left((X-a)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est clairement orthonormée. Puisqu'elle contient $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base.

Solution 12

1. En développant $\|x+y\|^2$, on prouve sans peine que

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

et l'on en déduit que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle$$

2. Soit $x \in E$. Posons

$$z = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$$

On a

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle z \mid e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i \mid e_k \right\rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\langle x \mid e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\langle x \mid e_k \rangle - \langle x \mid e_k \rangle)^2 = 0\end{aligned}$$

Ainsi $z = 0$.

3. D'après la question précédente, la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est génératrice de E. Comme $n = \dim(E)$, cette famille est une base de E. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k \mid e_i \rangle e_i$$

Ainsi, par identification des coordonées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$,

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \langle e_k \mid e_i \rangle = \delta_{k,i}$$

Comme cela est valable pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Solution 13

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

   - $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'évaluation.
   - $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $P \in E$. On a $\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) \geqslant 0$, la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.
   - Soit $P \in E$. Puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls , on a

   $$\langle P | P \rangle = P^2(-1) + P^2(0) + P^2(1) = 0$$

   si et seulement si $0, 1, -1$ sont racines de P. Puisque P est de degré inférieur à deux , cette condition est équivalente à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie.

2. Orthonormalisons la base canonique de E par le procédé de Gram-Schmidt.

- *Première étape*. On pose
$$\Gamma_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
- *Deuxième étape*. Notons p_1 la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\Gamma_1)$. Posons $n_1 = \mathrm{X} - p_1(\mathrm{X})$. On a
$$n_1 = \mathrm{X} - \langle \mathrm{X}|\Gamma_1\rangle\Gamma_1 = \mathrm{X} - 0\Gamma_1 = \mathrm{X}$$
Puisque $\|n_1\| = \sqrt{2}$, on complète (Γ_1) par
$$\Gamma_2 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{2}}.$$
- *Troisième étape*. Notons p_2 la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Posons $n_2 = \mathrm{X}^2 - p_2(\mathrm{X}^2)$. On a
$$\begin{aligned} n_2 &= \mathrm{X}^2 - \langle \mathrm{X}^2|\Gamma_1\rangle \cdot \Gamma_1 - \langle \mathrm{X}^2|\Gamma_2\rangle \cdot \Gamma_2 \\ &= \mathrm{X}^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \Gamma_1 - 0 \cdot \Gamma_2 \\ &= \mathrm{X}^2 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$
Puisque $\|n_2\| = \sqrt{2/3}$, on complète (Γ_1, Γ_2) par
$$\Gamma_3 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \sqrt{3/2}(\mathrm{X}^2 - 2/3).$$

La famille $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ est une base orthonormée de E.

3. Posons
$$\mathrm{L}_{-1} = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} \quad , \quad \mathrm{L}_1 = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_0 = 1 - \mathrm{X}^2.$$
Il s'agit des polynômes de Lagrange associés aux réels ± 1 et 0. Cette famille est clairement orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$, elle est donc libre dans E qui est de dimension trois : il s'agit d'une base orthonormée de E.

Remarque. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est lourd en calculs au-delà de trois vecteurs…Il faut parfois avoir un peu de culture – voire du flair ! – mais surtout suivre les indications de l'énoncé pour trouver des bases orthonormées.

Sous-espaces orthogonaux

Solution 14

1. Prouvons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

- L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$, de l'évaluation et de l'intégrale.
- La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique car le produit sur $\mathbb{R}$ est commutatif.
- Soit $f \in \mathrm{E}$. Par positivité de l'intégrale , on a
$$\langle f|f\rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geqslant 0.$$
La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc positive.
- Reprenons les notations précédentes. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ est équivalente à
$$\int_0^1 f^2(t)dt = 0.$$
La fonction f^2 étant continue et positive la condition est équivalente à $f = 0$. La forme bilinéaire $\langle , \rangle$ est donc définie.

2. *Calcul de* $F^{\perp}$.

a. Soit $f \in F^{\perp}$. On a alors

$$\forall g \in F, \ \langle f|g \rangle = 0.$$

Comme $\forall g \in F$, on a $fg \in F$ (car $(fg)(0) = 0$), on en déduit que :

$$\forall g \in F, \ \langle f|fg \rangle = 0.$$

Puisque $\forall g \in F$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle f|fg \rangle &= \int_0^1 f(t)f(t)g(t)dt = \int_0^1 f^2(t)g(t)dt \\ &= \langle f^2|g \rangle \end{aligned}$$

on a $f^2 \in F^{\perp}$.

b. Notons $g_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_0(t) = t$. On a clairement $g_0 \in F$. Ainsi, pour $f \in F^{\perp}$, on déduit de la question précédente que $\langle f^2, g_0 \rangle = 0$, i.e.

$$\int_0^1 tf^2(t)dt = 0.$$

Comme $f^2 g_0$ est continue et positive, on en déduit que $f^2 g_0 = 0$ et donc que :

$$\forall t \in [0,1], \ tf^2(t) = 0.$$

En particulier, $f(t) = 0$ pour tout $0 < t \leqslant 1$. On en déduit que $f(0) = 0$ par continuité de f en 0. Ainsi $f = 0$, ce qui achève de prouver que $F^{\perp} = \{0\}$.

3. Non, car en dimension finie, on a $F^{\perp} = \{0\}$ si et seulement si $F = E$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

Solution 15

---

s est clairement linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc s est une symétrie. Soit $S \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $A \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $S^{\top} = S$ et $A^{\top} = -A$. Par conséquent $\langle S, A \rangle = \mathrm{tr}(S^{\top}A) = \mathrm{tr}(SA)$ et $\langle A, S \rangle = \mathrm{tr}(A^{\top}S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$. Donc $\langle S, A \rangle = 0$. Ceci signifie que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sont orthogonaux l'un à l'autre : s est une symétrie orthogonale.

Solution 16

---

1. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j), e_i \rangle e_i$. On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$a_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

Ainsi A est symétrique.

2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $y \in \mathrm{Im}\, f$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Ainsi

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0_E, z \rangle 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$. De plus, $\dim(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = n - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f$ d'après le théorème du rang. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.

Solution 17

---

1. Supposons $F \subset G$. Soit $x \in G^{\perp}$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de G et a fortiori de F donc $x \in F^{\perp}$. Ainsi $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
Supposons F et G de dimension finie et $G^{\perp} \subset F^{\perp}$. D'après ce qui précède, $(F^{\perp})^{\perp} \subset (G^{\perp})^{\perp}$. Mais F et G étant de dimension finie, $(F^{\perp})^{\perp} = F$ et $(G^{\perp})^{\perp} = G$.

2. On sait que $F \subset F + G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ d'après la question précédente. De même, $G \subset F + G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$. Ainsi $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $y \in F + G$. Il existe donc $(u, v) \in F \times G$ tel que $y = u + v$. Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle$. Or $x \in F^{\perp}$ et $u \in F$ donc $\langle x, u\rangle = 0$. De même, $x \in G^{\perp}$ et $v \in G$ donc $\langle x, v\rangle = 0$. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F + G$, $x \in (F+G)^{\perp}$. D'où $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.
Par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

3. $F \cap G \subset F$ donc $F^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$ d'après la première question. De même, $F \cap G \subset G$ donc $G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$. On en déduit que $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
Supposons E de dimension finie. Alors

$$\dim(F^{\perp} + G^{\perp}) = \dim F^{\perp} + \dim G^{\perp} - \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp})$$

Or d'après la question précédente, $F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp}$ donc

$$\begin{aligned}\dim(F^{\perp} + G^{\perp}) &= \dim F^{\perp} + \dim G^{\perp} - \dim(F+G)^{\perp}\\ &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) - (\dim E - \dim(F+G))\\ &= \dim E - (\dim F + \dim G - \dim(F+G))\\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^{\perp}\end{aligned}$$

Puisqu'on a précédemment montré que $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$, on peut conclure que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Projecteurs orthogonaux

Solution 18

Notons p la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(u)$ et P sa matrice dans $\mathcal{B}$. Comme (u) est une base orthonormale de $\mathrm{vect}(u)$, on a, pour $x \in E$, $p(x) = \langle x, u\rangle u$. Notons X le vecteur colonne associé à un vecteur x de E. On a $PX = (U^{\top}X)U = U(U^{\top}X) = UU^{\top}X$. La matrice de P dans $\mathcal{B}$ est donc UU^{t}.

Solution 19

- Prouvons que **1.** $\Rightarrow$ **2.**

  Lorsque p est une projection orthogonale de E, on a $\mathrm{Im}(id_E - p) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ donc, pour tout x et y dans E, $p(x) \perp y - p(y)$ ie

  $$\langle p(x)|y\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle.$$

  Cette expression étant symétrique en (x, y), on a

  $$\begin{aligned}\langle p(x)|y\rangle &= \langle p(x)|p(y)\rangle = \langle p(y)|p(x)\rangle = \langle p(y)|x\rangle\\ &= \langle x|p(y)\rangle\end{aligned}$$

- Prouvons que **2.** $\Rightarrow$ **3.**

  Soit x dans E. Appliquons le **2.** à x et $y = p(x)$. On a

  $$\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|p(x)\rangle.$$

  ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

  $$\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|p(x)\|.$$

  Si $p(x) = 0$, l'inégalité **3.** est banalement vérifiée. Si $p(x) \neq 0$, $\|p(x)\| > 0$ et en divisant membre à membre l'inégalité précédente, on aboutit à

  $$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

- Prouvons que **3.** ⇒ **1.**

  Soient $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \operatorname{Ker} p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, alors $x \perp y$.
  Supposons maintenant $y \neq 0$. D'une part,
  $$\|p(x+\lambda y)\|^2 = \|x\|^2$$
  et d'autre part,
  $$\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$
  D'après **2.**, $2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif, ce qui impose $\langle x|y\rangle^2 \leq 0$ et donc $\langle x|y\rangle = 0$. On a donc $x \perp y$. On en déduit que $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$ et donc que p est une projection orthogonale.

Solution 20

Commençons par établir un plan de bataille…Il nous faut calculer une base orthonormée de F afin de calculer le projecteur orthogonal p sur F. On commence donc par déterminer une base de F qu'il faudra ensuite orthonormaliser par le procédé de Schmidt.

- *Détermination d'une base de* F. Il est clair que le système d'équations définissant F est équivalent à
  $$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0.$$
  Un vecteur X appartient donc à F si et seulement si il est de la forme
  $$\mathrm{X} = x_1(1,0,-1,0) + x_2(0,1,0,-1)$$
  où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Posons
  $$u = (1,0,-1,0) \quad \text{et} \quad v = (0,1,0,-1).$$
  La famille (u, v) est clairement libre et génératrice de F , il s'agit d'une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

- *Détermination d'une base orthonormée de* F. La base (u, v) est clairement orthogonale. Puisque l'on a $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$, la famille formée par
  $$u' = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0) \ \text{ et } \ v' = (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$
  est une base orthonormée de F.

- *Calcul de* p. Pour tout vecteur x de E, on a
  $$p(x) = (x|u')u' + (x|v')v'.$$
  Ainsi , en notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E, on a
  $$p(e_1) = (1/2, 0, -1/2, 0) \ , \ \ p(e_2) = (0, 1/2, 0, -1/2),$$
  puis
  $$p(e_3) = (-1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{et} \quad p(e_4) = (0, -1/2, 0, 1/2).$$
  Ainsi
  $$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Optimisation

Solution 21

Remarquons déjà que
$$\langle a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \mid a'\mathrm{X}^2 + b'\mathrm{X} + c'\rangle = aa' + bb' + cc'$$
puisque la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est orthonormale d'après l'énoncé. Pour les mêmes raisons
$$\|a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

1. Pout tout $P \in E$, la formule de Taylor s'écrit

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2$$

Ainsi les polynômes $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-1)^2$ engendrent F. La famille (P_1, P_2) est clairement libre : c'est donc une base de F.

2. **Première méthode**
D'après le cours, la quantité $\|X - P\|$ est minimale lorsque $P = \pi_F(X)$, où π_F désigne le projecteur orthogonal sur F. Orthonormalisons la famille (P_1, P_2) par le procédé de Gram-Schmidt. Posons

$$Q_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$$

Notons π_1 la projection orthogonale sur $\text{vect}(P_1)$. Posons

$$\begin{aligned} n &= (X-1)^2 - \pi_1((X-1)^2) \\ &= (X-1)^2 - \langle (X-1)^2 \mid Q_1 \rangle Q_1 \\ &= (X-1)^2 + \frac{3}{2}(X-1) \\ &= X^2 - X/2 - 1/2 \end{aligned}$$

Notons ensuite

$$Q_2 = \frac{n}{\|n\|} = \sqrt{2/3}\,n$$

On a

$$\begin{aligned} \pi_F(X) &= \langle X \mid Q_1 \rangle Q_1 + \langle X \mid Q_2 \rangle Q_2 \\ &= \frac{X-1}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - X/2 - 1/2) \\ &= -X^2/3 + 2/3X - 1/3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$X - \pi_F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{3}$$

et

$$\delta = \|X - \pi_F(X)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Deuxième méthode
On peut également remarquer que $\delta = \|\pi_{F^\perp}(X)\|$ où $\pi_{F^\perp}$ désigne le projecteur orthogonal sur $F^\perp$. En effet, $F^\perp$ est une droite vectorielle et il est donc plus facile de calculer un projeté orthogonal sur $F^\perp$ plutôt que sur F. Soit $Q = aX^2 + bX + c$ un vecteur directeur de $F^\perp$. Q est donc orthogonal à $X - 1$ et $(X-1)^2$ ce qui donne

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

et donc $a = b = c$. On peut donc prendre $Q = X^2 + X + 1$. Ainsi

$$\delta = \left| \frac{\langle Q \mid X \rangle Q}{\|Q\|} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Troisième méthode
Notons $Q = aX^2 + bX + c$ le projeté orthogonal de X sur $F^\perp$ de sorte que $\delta = \|Q\|$. Q est orthogonal à P_1 et P_2 de sorte que

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

et donc $a = b = c$. Par ailleurs, $X - Q \in F$ donc $a + b + c = 1$. On en déduit que $Q = \dfrac{X^2 + X + 1}{3}$ puis $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solution 22

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0;\pi],\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.On pose pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$f_{a,b} : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx \end{array} \right.$$

et

$$\mathrm{F} = \left\{f_{a,b},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{vect}(f_1,f_2)$$

avec $f_1 = f_{0,1}$ et $f_2 = f_{1,0}$. F est un sous-espace vectoriel de E et $\phi(a,b) = \|\sin - f_{a,b}\|^2$. Le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de sin sur F et vaut alors $d(x,\mathrm{F})^2 = \|\sin - p_\mathrm{F}(\sin)\|^2$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Première méthode

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour orthonormaliser la famille (f_1,f_2). On pose donc $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{g}{\|g\|}$ avec $g = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle e_1$. Alors $p_\mathrm{F}(\sin) = \langle \sin, e_1\rangle e_1 + \langle \sin, e_2\rangle e_2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\|\sin - p_\mathrm{F}(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_\mathrm{F}(\sin)\|^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \langle \sin, e_1\rangle^2 - \langle \sin, e_2\rangle^2 \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\langle \sin, g\rangle^2}{\|g\|^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, e_1\rangle\langle \sin, e_1\rangle\right)^2}{\|f_2\|^2 - \langle f_2, e_1\rangle^2} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\langle \sin, f_2\rangle - \frac{\langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}\right)^2}{\|f_2\|^2 - \frac{\langle f_2, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2}} \\
&= \|\sin\|^2 - \frac{\langle \sin, f_1\rangle^2}{\|f_1\|^2} - \frac{\left(\|f_1\|^2\langle \sin, f_2\rangle - \langle f_2, f_1\rangle\langle \sin, f_1\rangle\right)^2}{\|f_1\|^2\left(\|f_1\|^2\|f_2\|^2 - \langle f_2, f_1\rangle^2\right)}
\end{aligned}$$

A l'aide éventuellement d'intégrations par parties, on trouve

$$\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

On trouve finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} \phi = d(x,\mathrm{F})^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$$

Seconde méthode

On sait qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $p_\mathrm{F}(\sin) = af_2 + bf_1$. De plus, $\sin - p_\mathrm{F}(\sin) \in \mathrm{F}^\perp = \operatorname{vect}(f_1,f_2)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_\mathrm{F}(\sin), f_1\rangle = 0 \\ \langle \sin - p_\mathrm{F}(\sin), f_2\rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\langle f_2, f_1\rangle + b\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1\rangle \\ a\|f_2\|^2 + b\langle f_1, f_2\rangle = \langle \sin, f_2\rangle \end{cases}$$

Or on a trouvé précédemment que

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3} \qquad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5} \qquad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4} \qquad \langle \sin, f_1\rangle = \pi \qquad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

Ainsi

$$\begin{cases} \frac{\pi^4}{4}a + \frac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \frac{\pi^5}{5}a + \frac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \qquad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

A nouveau en vertu du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - a^2\|f_2\|^2 - 2ab\langle f_1, f_2\rangle - b^2\|f_1\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5} \end{aligned}$$

Solution 23

---

1. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.

2. Si $(\mathcal{S})$ admet une solution, alors $K = 0$. Les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\|AX - B\|^2 = 0$ i.e. tels que $AX - B = 0$. Ce sont donc les solutions de $(\mathcal{S})$.

3. **Première méthode**
Puisque $\{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} = \operatorname{Im} A$, on peut affirmer que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si AX est la projection de B sur Im A. Or AX est la projection de B sur Im A si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à Im A. Or $AX - B$ est orthogonal à Im A si et seulement si il est orthogonal à chaque colonne de A puisque les colonnes de A engendrent Im A. Ainsi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $A^\top(AX - B) = 0$ i.e. si et seulement si X est solution de $(\mathcal{S}')$.
Seconde méthode
Supposons que X soit solution de $(\mathcal{S}')$ i.e. $A^\top(AX - B) = 0$. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|AY - B\|^2 &= \|A(Y - X) + AX - B\|^2 \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2\langle A(Y - X), AX - B\rangle \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 + 2(Y - X)^\top A^\top(AX - B) \\ &= \|A(Y - X)\|^2 + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi X est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$.
Supposons que X soit pseudo-solution de $(\mathcal{S})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|A(X + \lambda Y) - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ou encore

$$\|(AX - B) + \lambda AY\|^2 \geq \|AX - B\|^2$$

ce qui donne via une identité remarquable

$$2\lambda\langle AY, AX - B\rangle + \lambda^2\|AY\|^2 \geq 0$$

Si on fixe Y, la dernière inégalité étant vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\langle AY, AX - B\rangle = 0$. Ainsi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AY, AX - B\rangle = 0$ ou encore $\langle Y, A^\top(AX - B) = 0$, ce qui prouve que $A^\top(AX - B) = 0$ et que X est solution de $(\mathcal{S}')$.

4. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^\top AX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$.
Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. On a donc $A^\top AX = 0$ puis $X^\top A^\top AX = 0$. Notons $Y = AX$. Ainsi $Y^\top Y = 0$ i.e. $\|Y\|^2 = 0$ donc $Y = 0$ i.e. $AX = 0$. D'où $X \in \operatorname{Ker} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A^\top A \subset \operatorname{Ker} A$.
Finalement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top A$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A$ via le théorème du rang.

5. Si $\operatorname{rg}(A) = n$, alors $\operatorname{rg}(A^\top A) = n$. La matrice $A^\top A$ est une matrice carrée de taille n et de rang n le système $(\mathcal{S}')$ est donc de Cramer : il admet une unique solution i.e. $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Solution 24

Comme E est ouvert, un minimum de f est forcément un minimum local et donc un point critique. Pour $x \in E$, $\nabla f(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x - x_i)$.

L'unique point critique de f sur E est donc $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$. Il suffit donc de vérifier que m est bien un minimum : il sera nécessairement unique.
Pour $x \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x-m+m-x_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-x_i\rangle + \|m-x_i\|^2\right) \\
&= p\|x-m\|^2 + f(m) + \left\langle x-m, \sum_{i=1}^{p} m-x_i \right\rangle \\
&= p\|x-m\|^2 + f(m) \geq f(m)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Solution 25

Pour $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{p} \|x-m+m-x_i\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-x_i\rangle + \|m-x_i\|^2\right) \\
&= p\|x-m\|^2 + f(m) + \left\langle x-m, \sum_{i=1}^{p} m-x_i \right\rangle \\
&= p\|x-m\|^2 + f(m) \geq f(m)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{p} m - x_i = 0$. Ceci prouve que f atteint bien son minimum en m.

Familles de vecteurs

Solution 26

1.

- Supposons que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ soit liée. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$. On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

  Si on note $(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p)$ les colonnes de la matrice $\mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p)$, on a donc $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathrm{C}_j = 0$. Les colonnes de la matrice $\mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p)$ sont liées donc $\det \mathrm{G}_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.
- Réciproquement, supposons que $\det \mathrm{G} = 0$. Alors les colonnes $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p$ de G sont liées. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathrm{C}_j = 0$. On en déduit comme précédemment que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (x_i | x_j) = 0$$

  Posons $z = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$. L'égalité précédente signifie que $(z | x_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$. Par linéarité, on a donc $(z | \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) = 0$ i.e. $\|z\|^2 = 0$. Donc $z = 0$, ce qui signifie que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.

2. **a.** Pour $1 \leq j \leq p$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} (x_j|e_i)e_i$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée. Donc $A = ((x_j|e_i))_{1\leq i,j\leq p}$. De plus,

$$(x_i|x_j) = \sum_{k=1}^{n} (x_i|e_k)(x_j|e_k)$$

Ceci signifie que $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.

b. On a $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = \det(A^\top)\det(A) = (\det A)^2$. Comme $x_1, \dots, x_p$ est libre, c'est une base de F et donc $\det A \neq 0$. Ainsi $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3. **a.**
- Si $x \in F$, les deux déterminants sont nuls.
- Si $x \notin F$, notons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\operatorname{vect}(x, x_1, \dots, x_p)$ et posons comme précédemment $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x, x_1, \dots, x_p)$. On a alors également $G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = A^\top A$. Notons également $A' = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ de sorte que $G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = (A')^\top A'$.

  Comme $\pi(x) \in F$ et que $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de F, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Notons $C, C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A : la matrice A′ s'obtient à partir de A en effectuant l'opération de pivot $C \leftarrow C - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$. On en déduit que $\det(A') = \det(A)$ puis que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.

b. Comme $x - \pi(x) \in F^\perp$, on a $x - \pi(x) \perp x_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On en déduit que

$$G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \left(\begin{array}{c|c} \|x - \pi(x)\|^2 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & G_p(x_1, \dots, x_p) \\ 0 & \end{array}\right)$$

On a donc $\det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p) = \|x - \pi(x)\|^2 \det G_p(x_1, \dots, x_p)$. On conlut en remarquant que $d(x, F)^2 = \|x - \pi(x)\|^2$.

Solution 27

---

1. On a $u + v = 0$. Donc $\|u\|^2 = -\langle u, v\rangle = -\sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i\alpha_j\langle x_i, x_j\rangle$. Or pour $(i, j) \in I \times J$, $\alpha_i\alpha_j\langle x_i, x_j\rangle > 0$. Ainsi si I et J sont non vides, $\|u\|^2 < 0$, ce qui est absurde.
2. Supposons que I soit non vide. Alors J est vide. On a donc $v = 0$ puis $u = 0$. Donc $\langle u, x_p\rangle = 0$. Or $\langle u, x_p\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i\langle x_i, x_p\rangle$. Mais pour $i \in J$, $\alpha_i\langle x_i, x_p\rangle < 0$. Comme I est non vide, $\langle u, x_p\rangle < 0$. Il y a donc contradiction. Ainsi I est vide. On démontre de même que J est vide.
3. Comme I et J sont vides, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$. Ceci signifie que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Solution 28

---

1. On a $A = (\langle x_j, e_i\rangle)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. De plus, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_i, e_k\rangle\langle x_j, e_k\rangle$$

Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.

2. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, alors $\operatorname{rg} A < p$. Par conséquent, $\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_p) = \operatorname{rg}(A^\top A) \leq \operatorname{rg} A < p$. Ceci signifie que $G(x_1, \dots, x_p)$ est non inversible. Donc $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors A est une matrice carrée inversible. Donc $\det(A) \neq 0$. Par conséquent, $\det G(x_1, \dots, x_p) = \det(A^\top A) = \det(A)^2 > 0$.

3. On pose $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{F}$ et $z \in \mathrm{F}^\perp$. On a alors :

$$\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p, x) = \det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p, y) + \det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p, z)$$

Comme $y \in \mathrm{F}$, la famille $(x_1, \dots, x_p, y)$ est liée et $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p, y) = 0$. De plus, $\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p, z) = \|z\|^2 \det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant étant diagonal par blocs. On conclut en remarquant que $d(x, \mathrm{F})^2 = \|z\|^2$.

Solution 29

---

1. La symétrie de φ est évidente. La bilinéarité de φ provient de la linéarité de l'intégrale. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ donc φ est positive. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme P^2 est continue positive qur $[-1, 1]$, on en déduit que P^2 est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P^2 admet donc une infinité de racines : il est donc nul. Par conséquent, P est également nul. Ceci prouve que φ est définie.
φ est donc un produit scalaire.

2. 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n. On en déduit que $\mathrm{Q}_n^{(k)}(-1) = \mathrm{Q}_n^{(k)}(1) = 0$ pour $k < n$.

3. Soit $k, l \in [\![0, n]\!]$ avec $k \neq l$. On peut supposer $k < l$.
Supposons $l \geq 1$ pour se donner une idée de la marche à suivre. On utilise une intégration par parties :

$$\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_k^{(k)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{Q}_k^{(k)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_k^{(k+1)}(t)\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $l - 1 < l$ donc $\mathrm{Q}_l^{(l-1)}(-1) = \mathrm{Q}_l^{(l-1)}(1) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\langle \mathrm{Q}_k^{(k)}, \mathrm{Q}_l^{(l)} \rangle = -\langle \mathrm{Q}_k^{(k+1)}, \mathrm{Q}_l^{(l-1)} \rangle$.
On peut donc prouver à l'aide d'une récurrence finie que $\langle \mathrm{Q}_k^{(k)}, \mathrm{Q}_l^{(l)} \rangle = (-1)^l \langle \mathrm{Q}_k^{(k+l)}, \mathrm{Q}_l \rangle$. Or $k < l$ donc $k + l > 2k$. Puisque $\deg \mathrm{Q}_k = 2k$, $\mathrm{Q}_k^{(k+l)} = 0$. On a donc $\langle \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l \rangle = 0$.
Les P_k sont donc orthogonaux deux à deux. La famille $(\mathrm{P}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale. De plus, $\deg \mathrm{Q}_k = 2k$ donc $\deg \mathrm{P}_k = \deg \mathrm{Q}_k^{(k)} = k$. La famille $(\mathrm{P}_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes à degrés étagés : elle est donc libre. Comme elle comporte $n + 1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1$, c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Endomorphismes remarquables

Solution 30

---

1. Soient $x, y, z \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle z, u(\lambda x + \mu y) \rangle &= -\langle u(z), \lambda x + \mu y \rangle && \text{par antisymétrie} \\
&= -\lambda \langle u(z), x \rangle - \mu \langle u(z), y \rangle && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\
&= \lambda \langle z, u(x) \rangle + \mu \langle z, u(y) \rangle && \text{par antisymétrie}
\end{aligned}$$

On a donc $\langle z, u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$, $u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu(y) = 0_\mathrm{E}$. D'où la linéarité de u.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soient $x, y \in \mathrm{E}$. Alors $\langle u(x + y), x + y \rangle = 0$. Or, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(x + y), x + y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle$$

D'où l'antisymétrie de u.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a vu dans la question précédente que u était linéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$ pour $1 \leq j \leq n$. On en déduit que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Or, par antisymétrie de u, $\langle u(e_j), e_i \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle$ i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. On en déduit que A est antisymétrique.

$(iii) \Rightarrow (i)$ u est bien linéaire par hypothèse. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Soit $x \in \mathrm{E}$ et X la matrice colonne de x dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\langle u(x), x\rangle = (\mathrm{MX})^\top \mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = -\langle x, u(x)\rangle$$

On en déduit que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

3. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et considérons Φ l'isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. D'après la question précédente, $\Phi(\mathrm{A}(\mathrm{E})) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ où $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques. On a donc également $\mathrm{A}(\mathrm{E}) = \Phi^{-1}(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$ donc A(E) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim \mathrm{A}(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ car Φ est un isomorphisme.

4. Soient $x \in \operatorname{Ker} u$ et $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(z)$.

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = -\langle z, u(x)\rangle = -\langle z, 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$. D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} u = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp$. Ainsi $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Soient $x \in \mathrm{F}^\perp$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{F}$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in \mathrm{F}$. Ainsi $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$, ce qui prouve que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$.

Solution 31

Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. La matrice A′ de p dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale (les éléments diagonaux valent 1 ou 0). Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On a $\mathrm{A} = \mathrm{PA'P}^{-1}$. Or P est orthogonale donc $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\top$. Ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{PA'P}^\top$ est symétrique.

Solution 32

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si A est nulle, $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 0$ et donc le rang de A est pair.
Sinon, notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on se donne une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathrm{S} \oplus \operatorname{Ker} u$ où S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix}$ avec B carrée de taille $p = \dim \mathrm{S}$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, P est orthogonale et $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{P}^\top \mathrm{AP}$. On en déduit que A′ est également antisymétrique et donc B est antisymétrique et C est nulle. On a donc $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{rg} \mathrm{A}' = \operatorname{rg} \mathrm{B}$ mais comme S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{rg} \mathrm{A}' = \dim \mathrm{S} = p$, ce qui prouve que B est inversible. Or $\det(\mathrm{B}^\top) = \det(-\mathrm{B}) = (-1)^p \det \mathrm{B}$ donc p est pair sinon on aurait $\det \mathrm{B} = 0$ et B non inversible.

Solution 33

D'après le cours sur les espaces euclidiens et le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(u)^\perp) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim(\operatorname{Im}(u)),$$

il suffit donc de prouver que

$$\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)^\perp.$$

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$. Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$. Soit $x' \in \operatorname{Ker}(u)$. On a :

$$\begin{aligned} 0 = \langle u(x + x') | x + x'\rangle &= \langle u(x) | x'\rangle + \langle x | u(x')\rangle \\ &= \langle u(x) | x'\rangle + 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle y | x'\rangle = 0.$$

On a donc prouvé que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)^\perp$.

Solution 34

---

1. L'application f est clairement un endomorphisme par linéarité à droite du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soient x et y dans E. On a

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle\langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a, y\rangle \\ &= \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle + \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle\end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en (x, y), on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(y), x\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

par symétrie du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $x \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a = 0.$$

Comme (a, b) est libre, cela équivaut à

$$\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0,$$

ie $x \in \mathrm{vect}(a, b)^{\perp}$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(a, b)^{\perp}$$

et, d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(f) &= n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \dim(\mathrm{vect}(a, b)^{\perp}) \\ &= n - (n - \dim(\mathrm{vect}(a, b))) = \dim(\mathrm{vect}(a, b)) \\ &= 2\end{aligned}$$

car (a, b) est libre.

3. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(f)$.

a. F est un sev de E en tant que noyau d'un endomorphisme de E.

- F *est stable par* f : soit $y \in \mathrm{Im}(f)$; on a alors $f(y) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$. Ainsi F est stable par f.
- *Base de* F : on a clairement

$$\mathrm{F} = \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{vect}(a, b).$$

Comme $\dim(\mathrm{F}) = 2$ (d'après la question **2.**), on a nécessairement

$$\mathrm{F} = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(a, b).$$

Ainsi (a, b) est une base de F car cette famille est libre.

b. Notons $\mathcal{B} = (a, b)$ et $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Comme

$$\begin{cases} f(a) &= \|a\|^2 b + \langle a, b\rangle a \\ f(b) &= \|b\|^2 a + \langle a, b\rangle b \end{cases},$$

on a

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \langle a, b\rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b\rangle \end{pmatrix}.$$

Solution 35

- Soit

$$x \in \mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}}).$$

On a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(y) - y$. Par une récurrence sans difficulté, on établit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ nx = u^n(y) - y.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ x = \frac{u^n(y) - y}{n}$$

et donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \|x\| \leqslant \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n}.$$

Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \|u^n(y)\| \leqslant \|y\|$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ 0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{2\|y\|}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par le théorème d'encadrement, $\|x\| = 0$, ie $x = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}}) = \{0\}.$$

- Comme $\mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})$, on déduit du théorème du rang que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})) = \dim(\mathrm{E})$$

et donc que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})$$

car $\mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{E}$.

Divers

Solution 36

Pour simplifier, on peut supposer $u_1, \dots, u_{n+1}$ unitaires de sorte que pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $(u_i \mid u_j) = \cos\alpha_n$.

Première méthode

Notons $u_1', \dots, u_n'$ les projections orthogonales de $u_1, \dots, u_n$ sur $\mathrm{vect}(u_{n+1})^\perp$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ $u_i' = u_i - (\cos\alpha_n)u_{n+1}$ et par le théorème de Pythagore, $\|u_i'\|^2 = \|u_i\|^2 - (\cos^2\alpha_n)\|u_{n+1}\|^2 = 1 - \cos^2\alpha_n$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts

$$(u_i' \mid u_j') = (u_i|u_j) - \cos\alpha_n\left((u_i|u_{n+1}) + (u_j|u_{n+1})\right) + \cos^2\alpha_n\|u_{n+1}\|^2 = \cos\alpha_n - \cos^2\alpha_n$$

Par conséquent,

$$\frac{(u_i' \mid u_j')}{\|u_i'\|\,\|u_j'\|} = \frac{\cos\alpha_n - \cos\alpha_n^2}{1 - \cos\alpha_n^2} = \frac{\cos\alpha_n}{1 + \cos\alpha_n}$$

Les vecteurs $u_1', \dots, u_n'$ font donc un angle constant α_{n-1} deux à deux. De plus, $\cos\alpha_{n-1} = \dfrac{\cos\alpha_n}{1 + \cos\alpha_n}$ i.e. $\cos\alpha_n = \dfrac{\cos\alpha_{n-1}}{1 - \cos\alpha_{n-1}}$. L'énoncé n'a de sens que pour $n \geq 2$. On trouve aisément $\alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. Posons $z_n = \dfrac{1}{\cos\alpha_n}$. La suite (z_n) vérifie la relation de récurrence $z_n = z_{n-1} - 1$. Puisque $z_2 = -2$, on trouve $z_n = -n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\alpha_n = \arccos\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Deuxième méthode

Puisque $\dim \mathrm{E} = n$, les $n + 1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ forment une famille liée. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0_{\mathrm{E}}$. Fixons $j \in [\![1, n+1]\!]$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(u_i \mid u_j) = (0_{\mathrm{E}} \mid u_j) = 0$$

ou encore

$$\lambda_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \cos\alpha_n = 0$$

Posons $\Lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. L'égalité précédente s'écrit encore

$$\lambda_j + (\Lambda - \lambda_j)\cos\alpha_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lambda_j(1-\cos\alpha_n)+\Lambda\cos\alpha_n=0$$

En sommant ces égalités pour $j\in[\![1,n+1]\!]$, on obtient

$$\Lambda(1-\cos\alpha_n)+(n+1)\Lambda\cos\alpha_n=0$$

ou encore

$$\Lambda(1+n\cos\alpha_n)=0$$

Par ailleurs, il existe $j\in[\![1,n+1]\!]$ tel que $\lambda_j\neq 0$ et on rappelle que $\lambda_j(1-\cos\alpha_n)+\Lambda\cos\alpha_n=0$. Si on avait $\Lambda=0$, on aurait donc $\cos\alpha_n=1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $\Lambda\neq 0$, ce qui permet d'affirmer que $\cos\alpha_n=-\dfrac{1}{n}$. On cherche implicitement un angle α_n *non orienté* donc $\alpha_n=\arccos\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution 37

Soit $X\in\operatorname{Ker}A$. On a donc $AX=0$ puis $A^{\mathsf{T}}AX=0$ donc $X\in\operatorname{Ker}A^{\mathsf{T}}A$. Ainsi $\operatorname{Ker}A\subset\operatorname{Ker}A^{\mathsf{T}}A$.
Soit maintenant $X\in\operatorname{Ker}A^{\mathsf{T}}A$. On a donc $A^{\mathsf{T}}AX=0$ puis $X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX=0$. Notons $Y=AX$. Ainsi $Y^{\mathsf{T}}Y=0$. Or $Y^{\mathsf{T}}Y$ est la somme des carrés des composantes de Y donc $Y=0$ i.e. $AX=0$. D'où $X\in\operatorname{Ker}A$. Ainsi $\operatorname{Ker}A^{\mathsf{T}}A\subset\operatorname{Ker}A$.
Finalement, $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}A^{\mathsf{T}}A$ et $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^{\mathsf{T}}A$ via le théorème du rang. En changeant A en A^{T}, on a également $\operatorname{rg}A^{\mathsf{T}}=\operatorname{rg}AA^{\mathsf{T}}$. Or $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^{\mathsf{T}}$. Ainsi $\operatorname{rg}A^{\mathsf{T}}A=\operatorname{rg}AA^{\mathsf{T}}=\operatorname{rg}A$.

Solution 38

1. Évident.

2. On va montrer que F admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $P\in\mathbb{R}_0[X]\cap F$. Alors il existe $(\lambda_n)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ tel que $P=\sum_{n=1}^{+infty}\lambda_n(1+X^n)$. On a donc

   $$P=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_nX^n$$

   Mais comme $\deg P\leq 0$, $\lambda_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donc $P=0$. Ainsi F et $\mathbb{R}_0[X]$ sont en somme directe.

3. Soit $P\in F^{\perp}$. Posons $P=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ avec $(a_n)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Puisque $\langle P,1+X^n\rangle=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_0+a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   Mais comme la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, on en déduit que $a_0=0$ puis que $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi $P=0$ puis $F^{\perp}=\{0\}$.
   En particulier, $F\oplus F^{\perp}=F\neq\mathbb{R}[X]$ puisque F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.