GROUPES, ANNEAUX, CORPS

Groupes

Exercice 1 — Stabilisateur

Soient E un ensemble et $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\mathrm{S}(x) = \{\sigma \in \mathrm{S}(\mathrm{E}), \sigma(x) = x\}$$

Montrer que $\mathrm{S}(x)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{S}(\mathrm{E}), \circ)$.

Exercice 2

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de $(x, y)^{*n}$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{G} =]-1, 1[$. On pose pour tous éléments x et y de G :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(\mathrm{G}, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de x^{*n}.

Exercice 4

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.

Exercice 5

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in \mathrm{G}, x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6 — Centre d'un groupe

Soit G un groupe. On définit le centre de G par

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{a \in \mathrm{G},\ \forall x \in \mathrm{G},\ ax = xa\}$$

i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}$ de la loi interne $*$ définie par : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a * b = a + b + ab$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 8 **Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose G non trivial i.e. $G \neq \{0\}$.

1. Question préliminaire : soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq \beta < (n+1)\alpha$.
2. Justifier que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure que l'on notera a.
3. On suppose que $a > 0$.
   - **a.** On suppose que $a \notin G$. Justifier l'existence de deux éléments distincts x et y de G appartenant à l'intervalle $]a, 2a[$.
   - **b.** Aboutir à une contradiction et en déduire que $a \in G$.
   - **c.** En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   - **d.** Soit $z \in G$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = na$.
   - **e.** En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $a = 0$.
   - **a.** Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $|g - t| < \varepsilon$.
   - **b.** En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit G un groupe abélien fini d'ordre impair. Calculer le produit des éléments de G.

Exercice 10 **Transport de structures**

Soient $(G, *)$ un groupe et H un ensemble. On suppose qu'il existe une bijection f de G sur H. On définit la loi . sur H de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in H^2,\ x.y = f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe.

Exercice 11 **Transport de structures**

Soient $(G, *)$ un groupe et $(H, .)$ un ensemble muni d'une loi interne. On suppose qu'il existe une surjection de G sur H vérifiant

$$\forall (x, y) \in G^2,\ f(x * y) = f(x).f(y)$$

Montrer que $(H, .)$ est un groupe. Que peut-on dire de f ?

Exercice 12

Soit G un groupe. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \iff \exists g \in G, y = g^{-1}xg$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 13

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit une relation binaire $\sim$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \iff \exists h \in H,\ y = xh$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 14

Dans cette exercice, on pourra identifier le plan à $\mathbb{C}$ via un repère orthonormé. On pourra en particulier identifier une transformation du plan à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note G l'ensemble des translations et des similitudes directes du plan. Montrer que G muni de la loi de composition est un groupe.
2. On note H l'ensemble des translations et des rotations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Morphismes de groupes

Exercice 15 **Théorème de Cayley**

Soit G un groupe. Notre but est de montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S(G).

1. Pour cela considérons pour tout $g \in G$ l'application *translation à gauche par g*
$$\varphi_g : G \to G, h \mapsto gh.$$
Montrer que $\varphi_g \in S(G)$.

2. Montrer que $G \longrightarrow S(G), g \longmapsto \varphi_g$, est un morphisme injectif. Conclure.

Exercice 16 ★ **Automorphismes intérieurs**

Soit G un groupe. Étant donné un élément a de G on définit l'application :
$$\varphi_a : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{cases}$$

1. Soit $a \in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G.
2. On pose $\mathfrak{I}(G) = \{\varphi_a, a \in G\}$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}(G)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{A}ut(G), \circ)$.
3. Montrer que $\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathrm{A}ut(G) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 17

Soit G un groupe. Montrer que $f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{cases}$ est un automorphisme de G si et seulement si G est commutatif.

Exercice 18

Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 19

Montrer que les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ continus sont les homothéties i.e. les applications $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Anneaux et corps

Exercice 20 ★

Montrer que l'ensemble des nombres décimaux
$$\mathbb{D} = \left\{\frac{k}{10^n} \quad : \quad (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$$
est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-ce aussi un sous-corps ?

Exercice 21 ★★★

Montrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

Exercice 22 ★★ **Entiers de Gauss**

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 23 ★★ **Éléments nilpotents**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_A$.

1. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si $x \times y$ est nilpotent, alors $y \times x$ est nilpotent.
2. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y commutent et que l'un des deux est nilpotent, alors $x \times y$ est nilpotent.
3. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
4. Soit $x \in A$. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 24 ★

Soit A un anneau tel que $\forall x \in A, x^2 = x$ (on dit que les éléments de A sont idempotents).

1. Montrer que $\forall x \in A, 2x = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 25 ★★ **Différence symétrique**

Soit E un ensemble non vide. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence de A et B par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser les éléments neutres pour Δ et $\cap$.
2. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(E)$ inversibles pour $\cap$?
3. L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est-il intègre ?

Exercice 26 ★ **Corps quadratique**

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est un corps.

Exercice 27 ★

Soit A un anneau intègre commutatif fini.

1. Soit a un élément non nul de A. Montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ est bijective.
2. En déduire que A est un corps.

Morphismes d'anneaux

Exercice 28 ★★ **Endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$**

Soit f un endomorphisme de corps de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
2. Montrer que f est croissant.
3. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 29 ★

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. **a.** Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{3}$ sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ i.e. avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $p \wedge q = 1$.

   b. Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ (a, b) & \longmapsto & a + b\sqrt{3} \end{array} \right.$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ sur le groupe $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, il existe donc un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{3}$.

   a. Pour tout réel $x = a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on appelle *conjugué* de x, noté $\tilde{x}$, le réel $a - b\sqrt{3}$.
   Montrer que $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme d'anneau.

   b. Pour tout réel $x = a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $N(x) = x\tilde{x}$.
   Vérifier que pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\right)^2$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

   c. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est inversible si et seulement si $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.
   Que vaut alors son inverse ? On distinguera les cas $N(x) = 1$ et $N(x) = -1$.