

## Généralités

### Exercice 1

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  $T$ -périodique telle que  $\int_0^T f(t) dt = 0$ . Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Que devient le résultat si  $\int_0^T f(t) dt \neq 0$  ?

### Exercice 2

Soient  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  admettant une limite finie  $l$  en  $+\infty$  et  $a$  un réel strictement positif.

1. Montrer que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+a} f(t) dt = al$ .
2. Montrer que  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (f(t+a) - f(t)) dt = - \int_0^a f(t) dt + al$ .
3. Calculer  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (\arctan(t+1) - \arctan t) dt$ .

### Exercice 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue.

1. Justifier l'existence de  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .
2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$ .

### Exercice 4

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  à valeurs réelles. Montrer que  $\left| \int_{[a, b]} f \right| = \int_{[a, b]} |f|$  si et seulement si  $f$  est de signe constant sur  $[a, b]$ .

### Exercice 5

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles. On suppose de plus  $g$  positive sur  $[a, b]$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

### Exercice 6

Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

1. On suppose que  $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule en un réel  $a \in ]0, \pi[$ .
2. On suppose que  $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = \int_0^\pi f(t) \cos t dt = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule deux fois sur  $]0, \pi[$ .  
On pourra considérer  $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$ .

### Exercice 7

#### Formule de la moyenne

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .

### Exercice 8

Soient  $n \in \mathbb{N}$   $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) telle que  $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins  $n+1$  fois sur  $[a, b]$ .

**Exercice 9**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante de  $[a, b]$ .

D'après le théorème de la bijection,  $f$  induit une bijection de  $[a, b]$  sur  $[f(a), f(b)]$  et  $f^{-1}$  est continue sur  $[f(a), f(b)]$ .

1. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a)$$

2. Donner une interprétation géométrique de cette formule.

**Calculs****Exercice 10****Stairs**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f(t) = [nt]$ . Montrer que  $f$  est en escalier sur  $[0, 1]$  et calculer son intégrale.

**Exercice 11 ★****Une intégrale trigonométrique**

On note

$$I = \int_0^\pi \frac{t}{2 + \sin(t)} dt \text{ et } J = \int_0^\pi \frac{dt}{2 + \sin(t)}.$$

1. Trouver une relation simple entre  $I$  et  $J$  en effectuant le changement de variable  $t = \pi - u$ .
2. Pour tout réel  $x$ , on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2 + \sin(t)}.$$

- a. Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Calculer  $F(x)$  en fonction de  $x$  pour tout  $x \in ]-\pi, \pi[$ .
- c. En déduire la valeur de  $J$  puis celle de  $I$ .

**Exercice 12**

Calculer les primitives suivantes

$$\begin{array}{lll} 1. \int \frac{dx}{x^2 + 5}; & 4. \int \tan^3(x) dx; & m \in \mathbb{N}; \\ 2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}; & 5. \int \frac{1}{\tan^3(x)} dx; & 7. \int \frac{\ln(x)}{x} dx; \\ 3. \int e^x \sin(e^x) dx; & 6. \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx, & 8. \int \frac{\operatorname{ch}(x) dx}{\operatorname{sh}^5(x)}. \end{array}$$

**Exercice 13 ★★**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $H$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $H$  ne s'annule pas.
2. On suppose la condition précédente satisfaite et on pose pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$ . Justifier que  $F$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de  $F(x)$  pour  $x \in ]-\pi, \pi[$ .
3. Calculer l'intégrale  $F(2\pi)$ .

**Exercice 14 ★★**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs. On définit une fonction  $f$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ . On note  $F$  celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Déterminer une expression de  $F(x)$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
4. Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45 \sin^2 t}$ .

**Exercice 15 ★★★****TPE MP**

$$\text{Calculer } I = \int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x-a^2)(b^2-x)} \, dx.$$

**Exercice 16 ★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

- Déterminer une relation entre  $I_{n+1}(x)$  et  $I_n(x)$ .
- En déduire l'existence et une expression simple de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$ .

**Inégalités intégrales****Exercice 17 ★★****L'inégalité de Poincaré**

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(0) = f(1) = 0$ .

- Vérifier que la fonction  $x \mapsto f(x) \cotan(\pi x)$  admet une limite (finie) en 0 et en 1. On notera  $g$ , le prolongement continu sur  $[0, 1]$  de cette fonction.
- On considère la fonction  $h = fg$ .

- Démontrer que  $h$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que, pour tout  $0 < x < 1$ ,

$$h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi(f(x)^2 + g(x)^2).$$

En déduire que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

- Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad h'(x) \leq \frac{1}{\pi} f'(x)^2 - \pi f(x)^2.$$

- En déduire enfin que

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

**Exercice 18 ★★****Une belle inégalité**

Soient  $a \leq b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$f(a) = 0 \text{ et } 0 \leq f' \leq 1.$$

Etablir que

$$\int_a^b f^3(t) dt \leq \left( \int_a^b f(t) dt \right)^2.$$

**Fonctions définies par des intégrales****Exercice 19****Banal**

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction  $\psi$  définie par

$$x \mapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1 + \ln^2(t)} dt.$$

**Exercice 20**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \int_0^x 3^{-|t|} dt$  où  $|t|$  représente la partie entière du réel  $t$ .

- Justifier que  $f$  est bien définie.
- Montrer que la suite  $(f(n))$  converge et donner sa limite.
- En déduire que  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et préciser celle-ci.

**Exercice 21**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Quel est le signe de  $f$  ?
3. Prolonger  $f$  par continuité partout où cela est possible.
4. Montrer que  $f$  est dérivable et étudier les variations de  $f$ . On déterminera également la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Étudier la concavité de  $f$ .
6. Tracer le graphe de  $f$ .

**Exercice 22**

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = g$ .
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y = g$ .

**Exercice 23**

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$ .

**Exercice 24**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Montrer que la fonction  $g : x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(tx) dt$  est lipschitzienne.

**Sommes de Riemann****Exercice 25 ★**

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

**Exercice 26 ★****Riemannissime**

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par,

$$v_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}.$$

**Exercice 27****L'exemple classique**

Étudier la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

**Exercice 28 ★★****Posé à Centrale**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $e^{\int_0^1 f(t) dt}$ .

**Exercice 29**

Déterminer un équivalent de  $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \dots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 30**

X PC 2012

Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

En déduire pour  $r > 1$ 

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{i\theta}| d\theta$$

**Equations intégrales****Exercice 31**Déterminer les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

**Exercice 32**Déterminer les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2f(1) - 3 \int_0^x f(t) dt$$

**Exercice 33****Une équation fonctionnelle**Soit  $\lambda \in [-1, 1]$ . Trouver les fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t) dt.$$

**Suites d'intégrales****Exercice 34 ★★****Intégrales de Wallis**On pose pour tout  $n \geq 0$ ,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .
3. En déduire une expression de  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante. En déduire que  $\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$ .
5. Démontrer que  $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$ .
6. Établir que  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ .
7. En déduire que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

**Exercice 35**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on pose  $f_{n,\lambda}(x) = \sin(2nx) \ln(\lambda \cos x)$ .

1. Etudier la limite de  $f_{n,\lambda}(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ .

2. On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,1}(x) dx$ . Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n,\lambda}(x) dx = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n} \ln \lambda + I_n$$

3. Calculer  $I_1$  et  $I_2$ .

4. Etablir que

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \ln(\sin x) dx$$

et

$$nI_n = (-1)^n J_n \quad \text{où} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nx) \cot x dx$$

5. Calculer  $J_n - J_{n-1}$  et en déduire  $I_n$  selon la parité de  $n$ .

**Exercice 36 ★★****Une récurrence double**

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{2 - \cos(t)} dt.$$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+2} = 4I_{n+1} - I_n$ .

2. En déduire une expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 37 ★★****Oral des Minettes 2005**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Prouver que, sur un ensemble à déterminer,

$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} = \sin(t) + \sin(3t) + \dots + \sin((2n-1)t).$$

2. En déduire une expression de

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt$$

sous la forme d'une somme.

3. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{2x-1} \leq \frac{1}{2k-1}.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt \sim \frac{1}{2} \ln(n).$$

**Exercice 38****Incontournable**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Prouver que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

converge vers 0.