

LIMITE ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS

Etude de limites

Solution 1

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

d'où, puisque $x^2 > 0$,

$$x - x^2 < f(x) \leq x$$

et donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Solution 2

1. a. Pour tout $x > 1$, on a :

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

donc $f(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b. Pour tout réel x , on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et pour tout $x > 0$, on aboutit à :

$$1 - \frac{1}{x} < g(x) \leq 1.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

2. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = g(1/x),$$

et on a vu que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1.$$

Comme $u = 1/x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $0+$, on déduit du théorème de composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1.$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h(n) = 1$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 1.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi

$$h(n + 1/2) = \frac{(n + 1/2)^{n+1/2}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sqrt{n + 1/2}$$

et donc :

$$h(n + 1/2) \geq \sqrt{n + 1/2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n + 1/2) = +\infty \neq 1.$$

Comme les deux suites $(n)_{n \geq 1}$ et $(n + 1/2)_{n \geq 1}$ tendent vers $+\infty$, on déduit du critère séquentiel sur les limites que h n'admet aucune limite en $+\infty$.

Solution 3

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est croissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0,$$

il existe $M \geq 1$ tel que

$$\forall x \geq M, 0 \leq f(x) - f(x-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \geq M$. Notons $n = \lfloor x - M \rfloor$. On a alors les $n + 1$ inégalités suivantes

$$\forall 0 \leq k \leq n, 0 \leq f(x-k) - f(x-k-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on aboutit après télescopage à

$$0 \leq f(x) - f(x-n-1) \leq (n+1) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $n = \lfloor x - M \rfloor \leq x - M$, on a en divisant par $x > 0$ et en remarquant que $x - n \leq x$,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or,

$$n \leq x - M < n + 1$$

ainsi

$$M - 1 \leq x - n - 1 < M$$

et donc, par croissance de f , on a

$$f(x-n-1) \leq f(M)$$

et ainsi, pour $x \geq M$,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(M)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant $x \geq \max(1, 2f(M)/\varepsilon)$, on a alors

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Solution 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = p/q$ et

$$\forall n \geq q, |\cos(n!\pi x)| = 1$$

car q divise alors $n!$ et $n!\pi x \in \pi\mathbb{Z}$. Ainsi

$$f(x) = 1.$$

- Si $x \notin \mathbb{Q}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n!\pi x \notin \pi\mathbb{Z}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\cos(n!\pi x)| < 1$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow +\infty} |\cos(n!\pi x)|^m = 0$$

et donc

$$f(x) = 0.$$

On a prouvé que $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, fonction indicatrice de \mathbb{Q} .

Solution 5

Montrons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Posons $u_n = f(2^{n+1}) - f(2^n)$. Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\frac{f(2^n)}{n} = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Le lemme de Césaro nous dit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Soit maintenant $x \in]1; +\infty[$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$: il suffit de prendre $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

$$0 \leq \frac{f(x)}{\ln x} \leq \frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2}$$

Or $n \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2} \rightarrow 0$ d'après ce qui précède.

Solution 6

Notons l la limite de f en $+\infty$. Soient T une période de f et $x \in D_f$. Comme $x + nT \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT) = l$. Mais la suite $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$. D'où $f(x) = l$.

Solution 7

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(f(n))$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(N) \geq A$. Mais comme f est croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$x \geq N \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(N) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Solution 8

1. D'après le théorème de la limite monotone, f admet en $+\infty$ une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Donc $f(x) + f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2l$. Or $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. D'où $l = 0$.

2. Comme f est décroissante, $f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De même, $2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$. Donc, pour $x \geq 0$

$$x[f(x) + f(x+1)] \leq 2xf(x) \leq x[f(x-1) + f(x)]$$

Or $f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) + f(x+1)) = 1$. Comme $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on a également $f(x) + f(x-1) \sim \frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x}$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(x-1) + f(x)] = 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$ et donc $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

Continuité ponctuelle

Solution 9

- Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Il reste à examiner la continuité en $n \in \mathbb{Z}$. Puisque sur $[n, n+1[$, $f(x) = n + \sqrt{x-n}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n = f(n).$$

Comme sur $]n-1, n[$, $f(x) = n-1 + \sqrt{x-n+1}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n = f(n).$$

La fonction est donc continue à droite et à gauche en n , elle est donc continue en n .

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Solution 10

- Puisque la fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Il reste à examiner la continuité en $n \in \mathbb{Z}$. Puisque sur $[n, n + 1[$, $f(x) = n \sin(\pi x)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = 0 = f(n).$$

Comme sur $]n - 1, n[$, $f(x) = (n - 1) \sin(\pi x)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = 0 = f(n).$$

La fonction est donc continue à droite et à gauche en n , elle est donc continue en n .

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Solution 11

La fonction $x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ est constante au voisinage de tout point non entier donc continue en ces points. La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ est également continue en tout point non entier. f est donc continue en tout point non entier.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Pour $x \in [n - 1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = (-1)^{n-1} \left(n - (n - 1) - \frac{1}{2} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$.
- Pour $x \in [n, n + 1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = (-1)^n \left(n - n - \frac{1}{2} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2}$. f est donc continue en n .

Finalement f est continue sur \mathbb{R} .

Solution 12

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- **Premier cas :** x_0 est irrationnel, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite de rationnels $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 \neq 0$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0 .
- **Deuxième cas :** x_0 est rationnel, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$. Cette fois, il existe une suite d'irrationnels $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et, cette fois encore, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(z_n) = 0 \neq 1$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0 .

2. Comme $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est bornée, $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ et a fortiori, $f(x) = o(x)$. Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : elle est donc dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$). A fortiori, f est continue en 0.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si f était continue en x_0 , alors $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ serait aussi continue en x_0 , puisque la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue en x_0 et que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = fg$. Par conséquent, la fonction f n'est continue en aucun autre point que 0.

Solution 13

1. Notons $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Soit $x \in D$. Alors $\ln x$ est bien défini et $x(\ln x)^2 + 1 > 0$. De plus, $\ln x \neq 0$ donc $\frac{1}{\ln x}$ est bien défini. Ainsi $f(x)$ est bien défini. f est donc définie sur D .

2. On a pour $x \in D$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x} \ln [x(\ln x)^2 + 1]\right)$$

$x \mapsto x(\ln x)^2 + 1$ est continue sur D comme produit et somme de fonctions continues et prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Comme \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto \ln [x(\ln x)^2 + 1]$ est continue sur D par composition de fonctions continues. De plus, \ln est continue et ne s'annule pas sur D donc $x \mapsto \frac{1}{\ln x} \ln [x(\ln x)^2 + 1]$ est continue sur D . \exp étant continue sur \mathbb{R} , f est continue sur D .

3. Comme $x(\ln x)^2 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ par croissances comparées, $\ln [x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x(\ln x)^2$. On a donc :

$$\frac{1}{\ln x} \ln [x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln x$$

Or $x \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

On a à nouveau $x(\ln x)^2 \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0$ donc $\ln [x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x(\ln x)^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (\ln x)^2$. Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln x} \ln [x(\ln x)^2 + 1] \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln x$$

Or $\ln x \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Comme f admet des limites finies en 0 et 1, f est prolongeable par continuité en 0 et 1.

4. On met en facteur le terme prépondérant dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \ln [x(\ln x)^2 + 1] &= \ln \left[x(\ln x)^2 \left(1 + \frac{1}{x(\ln x)^2} \right) \right] \\ &= \ln [x(\ln x)^2] + \ln \left[1 + \frac{1}{x(\ln x)^2} \right] \\ &= \ln x + 2 \ln(\ln x) + \ln \left[1 + \frac{1}{x(\ln x)^2} \right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \ln [x(\ln x)^2 + 1] = 1$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$.

Solution 14

Soit $x_0 > 0$. Il existe deux réels strictement positifs a et b tels que $x_0 \in [a, b]$ et, sur le segment $[a, b]$, la fonction f est croissante, majorée (par $f(b)$) et minorée (par $f(a)$). Elle possède donc une limite à gauche finie et une limite à droite finie en x_0 . Posons

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Comme f est croissante, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_1}{x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ell_2}{x_0}.$$

Or la fonction $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante, donc

$$\frac{\ell_2}{x_0} \leq \frac{\ell_1}{x_0}.$$

Mais $x_0 > 0$, donc

$$\ell_2 \leq \ell_1$$

et par conséquent, $\ell_1 = \ell_2$, ce qui signifie que f est continue en x_0 .

Applications du TVI

Solution 15

La fonction g définie par

$$g(t) = f(t) - f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

est continue (par continuité de f) et, puisque T est une période de f ,

$$g(T/2) = f(T/2) - f(T) = -f(0) + f(T/2) = -g(0).$$

Par conséquent,

- ou bien $g(0) = g(T/2) = 0$ et donc $f(0) = f(T/2)$,
- ou bien g change de signe sur l'intervalle $[0, T/2]$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t_0 \in [0, T/2]$ tel que $g(t_0) = 0$, donc tel que $f(t_0) = f(t_0 + T/2)$.

Solution 16

Notons, pour tout $x \in [0, 7/10]$,

$$g(x) = f(x + 3/10) - f(x).$$

La fonction g est continue en tant que somme de deux fonctions continues et ne s'annule pas. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est de signe constant sur l'intervalle $[0, 7/10]$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que f , on peut supposer que $g > 0$. On remarque alors que

$$g(0) = f(3/10) - f(0) = f(3/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) = f(6/10) - f(0) = f(6/10) > 0,$$

$$g(0) + g(3/10) + g(6/10) = f(9/10) - f(0) = f(9/10) > 0$$

et

$$g(7/10) = f(1) - f(7/10) = -f(7/10) > 0,$$

$$g(7/10) + g(4/10) = f(1) - f(4/10) = -f(4/10) > 0,$$

$$\begin{aligned} g(7/10) + g(4/10) + g(1/10) &= f(1) - f(1/10) \\ &= -f(1/10) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f s'annule sur les intervalles

$$]1/10, 3/10[,]3/10, 4/10[,]4/10, 6/10[,]6/10, 7/10[$$

et $]7/10, 9/10[$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

Solution 17

Posons $I = [a, b]$ et notons g l'application $g(t) = f(t) - t$. De l'inclusion $I \subset f(I)$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c, d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$.

Solution 18

Si $f(0) = 0$, alors f admet un point fixe. Sinon $f(0) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$, $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ prend la valeur 1 sur \mathbb{R}_+^* i.e. f admet un point fixe.

Solution 19

Soit $g \begin{cases} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \end{cases}$. Il suffit donc de prouver que g s'annule. g est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe $k_1, k_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leq 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geq 0$. Si $k_1 = k_2$, g s'annule évidemment et si $k_1 \neq k_2$, g s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 20

Posons $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$. Quitte à permuter les x_i , ce qui ne change pas la valeur de m , on peut supposer $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_n)$. On a alors

$$f(x_1) \leq m \leq f(x_n)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_1, x_n] \subset [0, 1]$ tel que $f(x) = m$.

Solution 21

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

Puisque f est décroissante, f admet une limite finie ou une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

De même, f admet une limite finie ou une limite égale à $+\infty$ en $-\infty$. Dans les deux cas, $\lim_{-\infty} g = +\infty$.

Comme g est continue, g s'annule sur \mathbb{R} d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

De plus, g est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que f admet un unique point fixe.

Solution 22

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = f(t) - t.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que g ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Puisque g est continue sur cet intervalle, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que g est de signe constant sur $[0, 1]$, par exemple positif. On sait qu'alors

$$\int_0^1 g(t) dt > 0$$

ce qui est absurde car

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t dt = \int_0^1 f(t) dt - 1/2 = 0$$

Solution 23

Soit a un point fixe de $f \circ f$. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a$ et $g(f(a)) = a - f(a) = -g(a)$. Donc g s'annule entre a et $f(a)$ i.e. f a un point fixe entre a et $f(a)$.

Continuité sur un segment

Solution 24

D'après la définition de la limite, il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq 1,$$

ainsi $\forall x \geq A$,

$$|f(x)| \leq 1 + |\ell|.$$

De plus, f étant continue sur le segment $[0, A]$, elle est bornée sur cet intervalle : il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, A]$,

$$|f(t)| \leq M.$$

En posant

$$M' = \max(|\ell| + 1, M),$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x)| \leq M'.$$

Solution 25

La fonction $h = g - f$ rest continue sur le segment $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad h(x) \geq h(c) > 0.$$

En posant $m = \frac{h(c)}{2}$, on obtient le résultat demandé.

Solution 26

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x < A, f(x) > f(0)$. De même, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > B, f(x) > f(0)$. Remarquons qu'on a nécessairement $A < 0$ et $B > 0$. De plus, f étant continue sur $[A, B]$, f est minorée sur $[A, B]$ et atteint sa borne inférieure m sur $[A, B]$. Comme $0 \in [A, B]$, on a $m \leq f(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq m$. f est donc minorée sur \mathbb{R} par m et m est atteint sur le segment $[A, B]$.

Solution 27

Posons $\forall x \in [a, b], g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Solution 28

Notons $I = [a, b]$. f étant continue, elle atteint ses bornes sur I : il existe $c, d \in I$ tels que

$$f(c) = \min_I f \text{ et } f(d) = \max_I f.$$

Comme $I \subset f(I)$ et $c, d \in I$, on a

$$f(c) \leq a \leq c \text{ et } f(d) \geq b \geq d.$$

Par conséquent, $f(c) - c \leq 0$ et $f(d) - d \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliquées à la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ entre c et d nous donne le résultat.

Solution 29

1. De l'inclusion $I \subset f(I)$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. f prend donc les valeurs a et b sur I .
2. Notons g l'application définie par $g(t) = f(t) - t$ pour $t \in [a, b]$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leq 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c, d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$. f admet donc un point fixe sur I .

Solution 30

1. C'est un classique. On a $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geq 0$. De même, $f(1) \in [0, 1]$ donc $f(1) \leq 1$. Ainsi l'application continue $x \mapsto f(x) - x$ prend une valeur positive et une valeur négative sur $[0, 1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que cette application s'annule sur $[0, 1]$ i.e. que f admet un point fixe.
2. D'après la première question, F est non vide. De plus, $F \subset [0, 1]$ donc F est borné. Ainsi F admet une borne inférieure a et une borne supérieure b . Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de F convergeant respectivement vers a et b . On a $f(a_n) = a_n$ et $f(b_n) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est continue, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$ par passage à la limite. Ainsi $a, b \in F$ donc $a = \min F$ et $b = \max F$.
3. Soit $x \in F$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ car $f(x) = x$. Ainsi $g(x)$ est un point fixe de f .
4. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Alors $f - g$ est de signe constant sur $[0, 1]$.
Supposons que $f - g > 0$. On a donc $f(a) > g(a)$ et donc $g(a) < a$ car a est un point fixe de f . Or, d'après la question précédente, $g(a)$ est également un point fixe de f . Mais a est le plus petit point fixe de f : il y a contradiction.
Supposons que $f - g < 0$. On a donc $f(b) < g(b)$ et donc $g(b) > b$ car b est un point fixe de f . Or, d'après la question précédente, $g(b)$ est également un point fixe de f . Mais b est le plus grand point fixe de f : il y a également contradiction.
Par conséquent $f - g$ s'annule sur $[0, 1]$.

Solution 31

- Notons l la limite de f en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq A$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Soit T une période de f . Pour tout $x \in [A; A + T]$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. La dernière égalité est vraie sur une période donc sur \mathbb{R} tout entier. En faisant tendre ε vers 0, on obtient que f est constante égale à l .
- Notons P l'ensemble des périodes de f et posons $p = \inf P$. Il s'agit donc de prouver que $p \in P$. Il existe une suite (t_n) d'éléments de P tendant vers p .
 - Supposons $p > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + t_n) = f(x)$. Par continuité de f , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + p) = f(x)$ et donc $p \in P$.
 - Supposons $p = 0$. Comme f est non constante, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq f(0)$. Posons $\varepsilon = |f(y) - f(0)|$. Par continuité de f en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; \alpha]$, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Comme (t_n) converge vers 0, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < t_k \leq \alpha$. L'intervalle de période $[0; t_k[$ contient un z tel que $f(z) = f(y)$. Comme $z \in [0; \alpha]$, $|f(z) - f(0)| < \varepsilon$ mais $|f(z) - f(0)| = |f(y) - f(0)| = \varepsilon$: il y a donc contradiction et p ne peut être égal à 0.
- Soit T une période de f . f est bornée et atteint ses bornes sur l'intervalle compact $[0; T]$. Par périodicité, f est bornée et atteint ses bornes sur \mathbb{R} .

Continuité et bijectivité**Solution 32**

- Remarquons que la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(y) = y^5 + y$ est strictement croissante sur ce segment. Puisqu'elle est continue, elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 2]$. On a donc, pour tout $1 \leq x \leq 2$ et $\forall y \in [0, 1]$, $g(y) = y^5 + y = x$ si et seulement si $y = g^{-1}(x)$. La fonction f existe donc et est unique car $f = g^{-1}$.
- La fonction f étant la bijection réciproque d'une fonction continue, elle est continue.

Solution 33

- Puisque $f \circ f = id_{[0,1]}$, f est une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même. En tant que bijection continue sur un intervalle, elle est strictement monotone (cf. le cours). Raisonnons par l'absurde en supposant f strictement décroissante. On aurait alors $0 = f(0) > f(1)$ et donc $f(1) < 0$ ce qui est absurde car f est à valeurs dans $[0, 1]$.
- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) \neq \alpha$. Si $f(\alpha) < \alpha$, par stricte croissance de f , on a $\alpha = f(f(\alpha)) < f(\alpha)$ ce qui absurde. De même, si $f(\alpha) > \alpha$, par stricte croissance de f , on a $\alpha = f(f(\alpha)) > f(\alpha)$ ce qui absurde. On aboutit donc dans tous les cas de figure à une absurdité.

Equations fonctionnelles**Solution 34**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Par récurrence, on montre que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de f en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$. Par conséquent, $f(x) = f(0)$.
La fonction f est donc constante.

Solution 35

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction lipschitzienne sur cet intervalle. La fonction g est continue sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions continues sur \mathbb{R} .

2. On a, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(g(x))^2 &= |g(x)|^2 = |f(x) - f(0)|^2 \\ &= |x - 0|^2 = x^2\end{aligned}$$

De plus, pour tous réels x et y ,

$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 &= |g(x) - g(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}(g(x) - g(y))^2 &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + (g(y))^2 \\ &= x^2 - 2g(x)g(y) + y^2\end{aligned}$$

et donc

$$g(x)g(y) = xy.$$

3. On remarque que g est injective (si $g(x) = g(y)$ alors $f(x) = f(y)$ et $|x - y| = 0$, d'où $x = y$). Comme $g(0) = 0$, on a $g(1) \neq 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{g(1)}.$$

Ainsi $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

4. Réciproquement, une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b,$$

avec a et b réels est une isométrie si et seulement si

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |a(x - y)| = |x - y|,$$

ie si et seulement si $|a| = 1$, ie $a = \pm 1$. Les seules isométries de \mathbb{R} sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \pm x + b,$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

Solution 36

1. Supposons tout d'abord que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$ car $\frac{x}{2^k} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc le dénominateur de la fraction précédente est non nul. Par conséquent

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

en utilisant un télescopage. Puisque $\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{\sin x}{x}$.

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$ et $x \neq 0$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ impair et un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = p2^q\pi$ (considérer la décomposition en facteurs premiers). Donc pour $n > q$, $P_n(x)$ contient le facteur $\cos \frac{p\pi}{2}$ qui est nul. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = 0$. La formule de l'énoncé est encore valable puisque dans ce cas, $\sin x = 0$.

2. On notera g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. On remarque que g est continue en 0.

Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{2}$ d'après l'énoncé. On établit par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. Comme f est continue en 0 et que $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. En passant à

la limite dans l'égalité $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)P_n(x)$, on obtient $f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}$. On a donc $f = f(0)g$. Réciproquement soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f = \lambda g$. f est bien continue en 0 car g l'est. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin x \cos x}{x} = f(x) \cos x$$

De plus, $f(2 \times 0) = f(0) = f(0) \times \cos 0$. La fonction f vérifie bien les conditions de l'énoncé. Les fonctions recherchées sont donc les fonctions λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 37

1. D'après l'équation, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

2. La fonction f est nécessairement impaire car

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(-x) = f(0) = 0.$$

3. On montre facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an.$$

On déduit alors de l'imparité de f que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an.$$

4. On démontre facilement par récurrence que

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x).$$

Soit $r \in \mathbb{Q} : \exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Par le point précédent,

$$f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right).$$

Or

$$f\left(\frac{q}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right) = a.$$

D'où $f\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{1}{q}$ et $f(r) = ar$.

5. La fonction f est supposée continue au point 0.

a. Prouvons que f est continue en tout point de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme

$$\forall h \in \mathbb{R}, f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$$

et, par continuité de f au point 0,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0,$$

la fonction f admet une limite au point x_0 et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Ainsi f est continue au point x_0 .

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des rationnels \mathbb{Q} étant dense dans \mathbb{R} , il existe $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de nombres rationnels convergeant vers x . Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(r_n) = ar_n,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax,$$

puis $f(x) = ax$ par continuité de f au point x .

6. Réciproquement les fonctions du type $x \mapsto ax$ vérifie bien la relation de l'énoncé. On en déduit que les applications recherchées sont exactement les fonctions linéaires.

Solution 38

- Supposons $|a| < 1$. Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \geq 0$,

$$f(a^n x) = f(x).$$

Par continuité de f en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n x) = f(0),$$

et par passage à la limite dans l'égalité de ci-dessus, $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante. *Réciproquement*, toute fonction constante vérifie l'équation initiale.

- Supposons $|a| > 1$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x/a).$$

On est ainsi ramené au cas précédent car $|1/a| < 1$.

Solution 39

- Si $n = 0$, les fonctions recherchées sont les fonctions constantes sur \mathbb{R} .
- Si $n = 1$, toute fonction continue est solution.
- Si $n \geq 2$ est impair. On a alors, par une récurrence immédiate, $\forall x \neq 0$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, f(x^{1/n^p}) = f(x).$$

Par continuité de f en 1, et puisque x^{1/n^p} tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$,

$$f(x) = f(1).$$

Puis, par continuité de f en 0, on a alors $f(0) = f(1)$. La fonction f est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.

- Si $n \geq 2$ est pair. On raisonne de même pour prouver que $\forall x > 0$,

$$f(x) = f(1).$$

Si $x < 0$, on a

$$f(x) = f(x^n) = f(1).$$

Par continuité de f en 0, on a alors $f(x) = f(1)$. La fonction f est donc constante. La réciproque est facile à vérifier.

Solution 40

Posons $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout x réel. On vérifie alors sans peine que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On en déduit classiquement que $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$$

et donc que g est de la forme

$$x \mapsto ax + b$$

avec a et b dans \mathbb{R} . Réciproquement, on vérifie que toute fonction de la forme

$$x \mapsto ax + b$$

avec a et b dans \mathbb{R} est solution de l'équation fonctionnelle proposée.

Solution 41

1. Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle. Il vient

$$(f(0))^2 - f(0) = f(0)(f(0) - 1) = 0,$$

ie $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2. Si $f(0) = 0$, pour tout réel x ,

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0.$$

Ainsi $f = 0$.

3. On suppose que $f(0) \neq 0$. On a donc $f(0) = 1$ d'après la première question.

- a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x)f(-x) = f(x - x) = f(0) = 1$$

et *a fortiori* $f(x) \neq 0$. La fonction f ne s'annule donc pas sur \mathbb{R} .

- b. On déduit classiquement du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction f , continue sur l'intervalle \mathbb{R} et ne s'y annulant pas (d'après la question précédente), garde un signe constant sur \mathbb{R} . Comme $f(1) = 1$, on a $f > 0$.

- c. Comme $f > 0$, on peut poser $g = \ln(f)$. On a alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) = g(x) + g(y).$$

On est ainsi ramené à une équation fonctionnelle bien connue : il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{g(x)} = e^{ax}.$$

Lipschitzianité**Solution 42**

1. On pose $I = [a; b]$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

Comme $f(I) \subset I$, $f(a), f(b) \in [a; b]$. Ainsi $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in I$ tel que $g(x) = 0$ i.e. $f(x) = x$.

2. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [-M; M]$.

$$||f(x) - f(0)|| \leq |f(x) - f(0)| \leq k|x| \leq kM.$$

Par conséquent

$$|f(x)| \leq kM + |f(0)|$$

Il suffit donc de choisir M tel que $kM + |f(0)| = M$ i.e. $M = \frac{|f(0)|}{1 - k} \in \mathbb{R}_+$.

3. En appliquant la première question à l'intervalle $[-M; M]$ de la question précédente, on en déduit que f admet un point fixe sur $[-M; M]$. Montrons que ce point fixe est unique. Soient x et y deux points fixes de f . Alors

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq k|x - y| \implies (1 - k)|x - y| \leq 0.$$

Puisque $1 - k > 0$

$$|x - y| \leq 0 \implies |x - y| = 0 \implies x = y$$

Continuité uniforme

Solution 43

1. Soit l la limite de f en $+\infty$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > A$, $|f(x) - l| < 1$: ainsi f est bornée sur $]A; +\infty[$. De plus, par continuité, f est bornée sur l'intervalle compact $[0; A]$. Donc f est bornée sur \mathbb{R} .
2. Soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $[0; +\infty[$ tels que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergent respectivement vers $\inf f$ et $\sup f$.
 - Si l'une des deux suites (x_n) ou (y_n) est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un réel x ou y de $[0; +\infty[$. Mais, par continuité de f , on a $f(x) = \inf f$ ou $f(y) = \sup f$ et donc f admet un minimum ou un maximum absolu.
 - Si aucune des deux suites n'est bornée, on peut extraire de chacune une sous-suite tendant vers $+\infty$. Par passage à la limite, $l = \inf f = \sup f$. Donc f est constante égale à l , elle admet bien évidemment un minimum et un maximum absolu.

En considérant la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$, on voit bien qu'une telle fonction n'admet pas forcément à la fois un minimum absolu et un maximum absolu.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq A$, $|f(x) - l| < \varepsilon/3$. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur l'intervalle compact $[0; A]$. Il existe donc α tel que pour tous $x, y \in [0; A]$ tels que $|x - y| < \alpha$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$.

- Si $x, y \in [0; A]$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

- Si $x, y \in [A; +\infty[$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

- Si $x \in [0; A]$ et $y \in [A; +\infty[$, on a nécessairement $|x - A| \leq |x - y| < \alpha$ donc $|f(x) - f(A)| < \varepsilon/3$. De plus, $|f(A) - f(y)| \leq |f(A) - l| + |l - f(y)| < 2\varepsilon/3$. Finalement,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| < \varepsilon$$

- Si $x \in [A; +\infty[$ et $y \in [0; A]$, on procède comme précédemment.

On a donc prouvé que f était uniformément continue.

Solution 44

REMARQUE. Si f est une fonction uniformément continue et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mais alors, on peut prouver par récurrence que, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$|x - y| < m\alpha \implies |f(x) - f(y)| < m\varepsilon$$

Comme f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| < 1$. Posons $m = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Ainsi $m\alpha \geq 1$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f(n) \geq A + m$. Soit $x \geq N$ et posons $n = \lfloor x \rfloor$. Ainsi $n \geq N$ et donc $f(n) \geq A + m$. De plus, $|x - n| < 1 \leq m\alpha$. D'après la remarque, $|f(x) - f(n)| < m$, ce qui implique $f(x) > f(n) - m \geq A$. On a donc prouvé le résultat voulu.

Solution 45

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite finie l en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$x \geq A \implies |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, A]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0, A], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $|x - y| < \alpha$.

- Si $x, y \in [0, A]$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

- Si $x \geq A$ et $y \geq A$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

- Si $x \in [0, A]$ et $y \geq A$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - l| + |l - f(y)|$$

Comme $|x - y| < \alpha$, $|x - A| < \alpha$ donc $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ par uniforme continuité de f sur $[0, A]$.

On a également $|f(A) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ car $A \geq A$ et $y \geq A$.

Finalement, on a bien $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- On procède de même si $y \in [0, A]$ et $x \geq A$.

Solution 46

Soit f une fonction périodique continue sur \mathbb{R} et T une de ses périodes. Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue sur $[-T, 2T]$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On peut supposer $\alpha < T$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0, T]$ (prendre $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$). On a alors $y - nT \in]-\alpha, T + \alpha[\subset [-T, 2T]$. Comme $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \alpha$ et que $x - nT$ et $y - nT$ appartiennent à l'intervalle $[-T, 2T]$, on a d'après ce qui précède :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| < \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .