

# MATRICES

## Calculs élémentaires

### Solution 1

On obtient après tout calcul,

$$\begin{pmatrix} -1 - i & 1 + 2i \\ -5 & 8 - 5i \\ -2 & i \end{pmatrix}.$$

### Solution 2

D'après la formule définissant le produit matriciel,

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$(a + d)M = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^2 + (a + d)M + (ad - bc)\mathbb{1}_2 = \mathbb{O}_2.$$

### Solution 3

Notons, pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $S_k$  la somme des coefficients de la  $k$ -ième colonne de  $A$ . D'après la formule définissant le produit matriciel,

$$UA = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{pmatrix}$$

De même, puisque  $S_1 + \dots + S_n = \sigma(A)$ , on a

$$UAU = \begin{pmatrix} \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \\ \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma(A) & \sigma(A) & \dots & \sigma(A) \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$UAU = \sigma(A)U.$$

### Solution 4

On a

$$A(B - A - \mathbb{1}_n) = \mathbb{1}_n$$

ainsi  $A$  est-elle inversible d'inverse  $B - A - \mathbb{1}_n$  et donc

$$A(B - A - \mathbb{1}_n) = (B - A - \mathbb{1}_n)A$$

d'où  $AB = BA$ .

### Solution 5

Notons

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

- Calcul de C : pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , on a

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = 2j.$$

- Calcul de D : pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n (i+k)(k-j) \\ &= (i-j) \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 - ij \sum_{k=1}^n 1 \\ &= (i-j) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - nij \end{aligned}$$

### Solution 6

On vérifie facilement que pour  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $M(x)M(y) = M(x+y)$ . On a en particulier pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $M(x)M(-x) = M(0) = I_3$ , ce qui prouve que  $M(x)$  est inversible. Ainsi  $G \subset GL_3(\mathbb{R})$ .

Vérifions que  $G$  est un sous-groupe de  $GL_3(\mathbb{R})$  :

- $I_3 = M(0) \in G$  ;
- pour  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $M(x)M(y) = M(x+y) \in G$  ;
- pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $M(x)^{-1} = M(-x) \in G$ .

Ceci prouve que  $G$  est un sous-groupe de  $GL_3(\mathbb{R})$ . De plus, l'application  $M : x \mapsto M(x)$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(G, \times)$  puisque  $M(x)M(y) = M(x+y)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $M$  est surjectif par définition de  $G$ . De plus,  $M(x) = I_3$  implique  $x = 0$ , ce qui prouve que  $M$  est injectif. Ainsi  $M$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  sur  $(G, \times)$ .

### Solution 7

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ . Alors

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \geq 0$$

comme somme de termes positifs.

Soit  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . La somme des coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $AB$  est :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (AB)_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( B_{kj} \sum_{i=1}^n A_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p B_{kj} \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^n A_{ik} = 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi  $AB$  est stochastique.

**REMARQUE.** On peut aussi remarquer que  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est stochastique si et seulement si  $A$  est à coefficients positifs et  $AU_p = U_n$  où  $U_p \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  est la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

On vérifie comme précédemment que si  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  est un couple de matrice stochastiques, alors  $AB$  est bien à coefficients positifs. De plus,  $ABU_q = AU_p = U_n$  donc  $AB$  est bien stochastique.

## Puissances

### Solution 8

## 1. Posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $A = I_3 + J$ . On remarque que  $J^3 = 0$  et que  $J$  et  $I_3$  commutent. On a donc, d'après la formule du binôme,

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

Puisque

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $A = aI_2 + bJ$ . On remarque que  $J^2 = 0$  et que  $bJ$  et  $aI_2$  commutent. On a donc, d'après la formule du binôme,

$$A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bJ.$$

Ainsi, pour  $n \geq 2$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

3. Grâce aux formules d'addition trigonométriques, on prouve sans peine par récurrence sur  $n$  que

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

**REMARQUE.**  $A$  est une matrice de rotation vectorielle plane, ce qui rend le calcul de  $A^n$  banal...

## 4. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

ainsi, par un calcul sans difficulté,

$$A^2 - 5A + 6I_2 = 0.$$

On remarque que le polynôme

$$P = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

est annulateur de la matrice  $A$ . Effectuons la division euclidienne de  $X^n$  par  $P \neq 0$ . Il existe un polynôme réel  $Q$  et deux réels  $a_n, b_n$  tels que

$$X^n = PQ + a_n X + b_n.$$

Après évaluation en 2 et 3, on obtient le système

$$\begin{cases} 2^n & = & 2a_n & + & b_n \\ 3^n & = & 3a_n & + & b_n \end{cases},$$

d'où

$$a_n = 3^n - 2^n \text{ et } b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A + b_n I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Solution 9

Notons

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Le système se traduit par l'égalité matricielle

$$X_{n+1} = M X_n,$$

où l'on a posé

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \geq 0, X_n = M^n X_0.$$

Notons  $U = (1)_{1 \leq i, j \leq 3}$  de sorte que

$$M = U - I_3.$$

Puisque  $U^2 = 3U$ , on a

$$(M + I_3)^2 = 3(M + I_3),$$

c'est-à-dire  $M^2 - M - 2I_3$ . Le polynôme

$$P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$$

est annulateur de la matrice  $M$ . Effectuons la division euclidienne de  $X^n$  par  $P \neq 0$ . Il existe un polynôme réel  $Q$  et deux réels  $a_n, b_n$  tels que

$$X^n = PQ + a_n X + b_n.$$

Après évaluation en  $-1$  et  $2$ , on obtient le système

$$\begin{cases} 2^n &= 2a_n + b_n \\ (-1)^n &= -a_n + b_n \end{cases},$$

d'où

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

On a donc  $M^n = a_n M + b_n I_3$ , d'où l'expression de  $M^n$ ,

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - 3(-1)^n}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n - 3(-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - 3(-1)^n}{3} & \frac{2^n - 3(-1)^n}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases} u_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} u_0 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} v_0 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} w_0 \\ v_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} u_0 + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} v_0 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} w_0 \\ w_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} u_0 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} v_0 + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} w_0 \end{cases}$$

**Solution 10**

Le polynôme

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 2)$$

est annulateur de la matrice  $A$ . Effectuons la division euclidienne de  $X^n$  par  $P \neq 0$ . Il existe un polynôme réel  $Q$  et trois réels  $a_n, b_n, c_n$  tels que

$$X^n = PQ + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

Après évaluation en  $\pm 2$  et  $1$ , on obtient le système

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n + c_n \\ 2^n &= 4a_n + 2b_n + c_n \\ (-2)^n &= 4a_n - 2b_n + c_n \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} a_n = \frac{-1 + 2^n - 2^{n-2}[1 + (-1)^{n+1}]}{3} \\ b_n = [1 + (-1)^{n+1}]2^{n-2} \\ c_n = \frac{4 - 2^n - 2^{n-1}[1 + (-1)^{n+1}]}{3} \end{cases},$$

et

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n \text{Id}_p.$$

**Solution 11**

1. On a  $A^2 = I_3$ ,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $B^3 = I_3$ . On en déduit les calculs suivants :

► *Puissances de A* : si  $n$  est pair  $A^n = I_3$ , sinon  $A^n = A$ .

► *Puissances de B* : si  $n \equiv 0 [3]$ ,  $B^n = I_3$ ; si  $n \equiv 1 [3]$ ,  $B^n = B$ ; si  $n \equiv 2 [3]$ ,  $B^n = B^2$ .

2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$AB^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution 12**

Posons

$$I = I_3 \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $M = bI + aK$ . Comme  $I$  et  $K$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$M^n = (bI + aK)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} K^\ell.$$

On prouve par une récurrence immédiate que, pour tout entier  $m \geq 1$ , on a :

$$K^m = \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix}.$$

En notant

$$s = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^{\ell-1},$$

on aboutit donc à :

$$M^n = \begin{pmatrix} s + b^n & 0 & s \\ 0 & b^n & 0 \\ s & 0 & s + b^n \end{pmatrix}.$$

On conclut en appliquant à nouveau la formule du binôme :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^{\ell-1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n-\ell} 2^\ell - b^n \right) \\ &= \frac{(b + 2a)^n - b^n}{2}. \end{aligned}$$

### Solution 13

Notons  $B_k = A^k + A^{-k}$ . On a l'égalité suivante en termes de fractions rationnelles :

$$X^{k+2} + X^{-(k+2)} = (X^{k+1} + X^{-(k+1)})(X + X^{-1}) - (X^k + X^{-k})$$

On peut tout à fait substituer la matrice  $A$  à  $X$ , ce qui donne  $B_{k+2} = B_{k+1}B_1 - B_k = B_{k+1} - B_k$  puisque  $B_1 = I_n$ . Quitte à raisonner coefficient par coefficient, on peut appliquer les résultats connus sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux pour affirmer qu'il existe  $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, B_k = r^n (\cos(k\theta)C + \sin(k\theta)D)$$

où  $re^{\pm i\theta}$  sont les racines complexes conjuguées de  $X^2 - X + 1$ . On trouve facilement  $r = 1$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . On a de plus  $B_0 = 2I_n$  et  $B_1 = I_n$ . Les matrices  $C$  et  $D$  sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} C = 2I_n \\ \frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = I_n \end{cases}$$

On obtient  $C = 2I_n$  et  $D = 0$ . On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k + A^{-k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n$$

### Solution 14

1. a. On pose  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $E = \text{vect}(U, V, W)$ . Ainsi  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La famille  $(U, V, W)$  est libre : c'est donc une base de  $E$  et  $\dim E = 3$ .

b.  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc un sous-groupe additif de  $E$ . De plus, Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. Enfin,  $I_2 \in E$ .  $E$  est un sous-anneau de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donc un anneau.

Cet anneau n'est pas commutatif : considérer par exemple les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

c. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices : on en déduit que le produit de deux éléments  $G$  est un élément de  $G$ . De plus, une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls est inversible et les coefficients diagonaux de l'inverse sont les inverses des coefficients diagonaux : on en déduit que tout élément de  $G$  admet un inverse dans  $G$ . Ainsi  $G$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  donc un groupe.

2. Considérons dans un premier temps le cas  $a = b$ . Alors  $A = aI_2 + C$  avec  $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $aI_2$  et  $C$  commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} C^k$$

On a  $C^k = 0$  pour  $k \geq 2$  donc pour  $p \geq 1$ ,  $A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$  et bien entendu,  $A^0 = I_2$ .

Considérons maintenant le cas  $a \neq b$ . Alors, à l'aide des résultats sur les matrices triangulaires supérieures énoncés plus haut, on peut affirmer que  $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c_p \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$  où  $c_p$  est un réel. En considérant que  $M^{p+1} = M^p.M = M.M^p$ , on obtient  $c_{p+1} = a^p c + b c_p = a c_p + b^p c$ .

On obtient donc  $c_p = c \frac{b^p - a^p}{b - a}$ . Ainsi  $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{b^p - a^p}{b - a} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

3. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| e^x - \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} e^t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, e^x)$$

car  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} = e^x$ .

De plus,  $\sum_{p=1}^n \frac{px^{p-1}}{p!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ . On en déduit qu'on a également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{px^{p-1}}{p!} = e^x$ .

Considérons dans un premier temps le cas  $a = b$ . En raisonnant coefficient par coefficient et en utilisant ce qui précède,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!} =$

$$\begin{pmatrix} e^a & e^a c \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le cas  $a \neq b$ . En raisonnant à nouveau coefficient par coefficient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!} = \begin{pmatrix} e^a & \frac{e^b - e^a}{b - a} c \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ .

4.  $f(\mathbb{O}_2) = I_2 \neq \mathbb{O}_2$  donc  $f$  n'est pas linéaire. Soient  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$  des éléments de  $E$  tels que  $f(A) = f(A')$ . Comme la fonction  $\exp$  est injective (sur  $\mathbb{R}$ ),  $a = a'$  et  $b = b'$ . On en déduit ensuite  $c = c'$ . Par conséquent,  $A = A'$  ce qui prouve l'injectivité de  $f$ .

$f$  n'est pas surjective, il suffit de considérer un élément de  $E$  dont l'un des éléments diagonaux est négatif, il ne peut admettre d'antécédent par  $f$ .

Il est clair que tout élément de  $E$  admet une image par  $f$  dans  $G$  donc  $\text{Im } f \subset G$ . Réciproquement soit  $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in G$ . Par

conséquent  $a' > 0$  et  $b' > 0$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$ .

Cas  $a' \neq b'$  : Si  $f(A) = B$  alors nécessairement  $a \neq b$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = a' \\ e^b = b' \\ c \frac{e^b - e^a}{b - a} = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln a' \\ b = \ln b' \\ c = c' \frac{\ln b' - \ln a'}{b' - a'} \end{cases}$$

Cas  $a' = b'$  :

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = a' \\ ce^a = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln a' \\ c = \frac{c'}{a'} \end{cases}$$

Ainsi tout élément de  $G$  admet un antécédent par  $f$  dans  $E$ , ce qui prouve que  $G \subset \text{Im } f$ . Finalement  $G = \text{Im } f$ .

### Solution 15

**Première méthode** Le calcul de  $M^2$  donne  $M^2 = M + 2I$  i.e.  $M^2 - M - 2I = 0$ . Soit  $R_n$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ .  $R_n$  est de degré 1 donc de la forme  $a_n X + b_n$  avec  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Comme  $-1$  et  $2$  sont racines de  $P$ , on trouve  $-a_n + b_n = (-1)^n$  et  $2a_n + b_n = 2^n$ . Il vient  $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$  et  $b_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$ . On a alors  $M^n = a_n M + b_n I$ .

**Deuxième méthode** En calculant les premières puissances de  $M$ , on est amené à faire l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{HR}(n) : M^n \text{ est de la forme } a_n I + b_n M.$$

La récurrence est facile et nous donne de plus les relations de récurrence  $a_{n+1} = 2b_n$  et  $b_{n+1} = a_n + b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Un calcul rapide nous montre que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  vérifient la relation de récurrence  $u_{n+2} - u_{n+1} + 2b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est  $P = X^2 - X + 2 = (X + 1)(X - 2)$ . Ainsi  $a_n$  et  $b_n$  sont de la forme  $\lambda(-1)^n + \mu 2^n$ .

Comme  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 0$ , on trouve  $\lambda$  et  $\mu$  dans les deux cas puis  $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$  et  $b_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$ .

## Inverses

### Solution 16

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un vecteur colonne *non nul*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tel que  $AX = 0$ . Soit  $i_0 \leq n$  tel que  $|x_{i_0}| > 0$  soit le maximum des  $|x_i|$ ,  $i \leq n$ . Puisque  $AX = 0$ , on a en particulier

$$-a_{i_0, i_0} x_{i_0} = \sum_{j \neq i_0}^n a_{i_0, j} x_j.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{j \neq i_0}^n a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}| |x_j|,$$

et, par définition de  $i_0$ ,

$$\sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}| |x_j| \leq \left( \sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}| \right) |x_{i_0}|$$

d'où

$$|a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| \leq \left( \sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}| \right) |x_{i_0}|$$

et puisque  $|x_{i_0}| \neq 0$ ,

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

### Solution 17

- $\mathcal{U}_n$  est non vide car contient la matrice  $I_n$ .
- $\mathcal{U}_n$  est stable par le produit matriciel. Soient  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{U}_n$ . Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , on

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (M)_{i,k} (N)_{k,j}.$$

- Si  $j < i$ , on a  $(M)_{i,k} = 0$  pour tout  $k < i$  et  $(N)_{k,j} = 0$  pour tout  $k > j$ . Ainsi, pour tout  $k$ ,  $(M)_{i,k} (N)_{k,j} = 0$ . la matrice  $MN$  est donc triangulaire supérieure.
- Si  $i = j$ , on peut reprendre les mêmes arguments :  $(M)_{i,k} = 0$  pour tout  $k < i$  et  $(N)_{k,i} = 0$  pour tout  $k > i$ . Ainsi, pour tout  $k \neq i$ ,  $(M)_{i,k} (N)_{k,i} = 0$ . De plus,  $(M)_{i,i} (N)_{i,i} = 1 \times 1 = 1$ . On a donc  $MN \in \mathcal{U}_n$ .
- $\mathcal{U}_n$  est stable par passage à l'inverse. Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  dans  $\mathcal{U}_n$ . Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  deux vecteurs colonnes de taille  $n$  tels que  $MX = Y$ . Cette égalité équivaut au système suivant,

$$\forall 1 \leq i \leq n-1, \quad x_i + \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_j = y_i \quad \text{et} \quad x_n = y_n.$$

Ainsi,  $x_n = y_n$ , puis

$$x_{n-1} = y_{n-1} - m_{n-1,n} x_n = y_{n-1} - m_{n-1,n} y_n.$$

Par une récurrence finie, on prouve alors sans peine que  $x_{n-k}$  peut s'écrire sous la forme

$$x_{n-k} = y_{n-k} + \sum_{j=n-k+1}^n n_{n-k,j} y_j,$$

avec les  $n_{k,\ell}$  dans  $\mathbb{R}$ . On a donc prouvé que  $Y = MX$  équivaut à  $X = NY$  avec  $N = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale :  $M$  est inversible et son inverse  $N$  appartient à  $\mathcal{U}_n$ .

- $\mathcal{U}_n$  est donc un sous-groupe de  $T_n^+$ .

### Solution 18

On pivote en colonnes sur la matrice  $\begin{pmatrix} A \\ I_4 \end{pmatrix}$  de manière à ramener la partie supérieure à  $I_4$ . La partie inférieure sera alors  $A^{-1}$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & 1 & & & & \\ -9 & 2 & 1 & 2 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & & & & \\ -3 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & -1 & 0 & 1 \\
 1 & 2 & -9 & 2 \\
 1 & -1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & -3 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 C_1 \leftrightarrow C_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 3 & -9 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -3 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{l}
 C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\
 C_4 \leftarrow C_4 - C_1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & -9 & 3 \\
 1 & -1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & -3 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 C_2 \leftrightarrow C_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -8 & 3 \\
 1 & 0 & -3 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & -1 & -9 & 4 \\
 0 & 1 & 9 & -3
 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{l}
 C_3 \leftarrow C_3 + 9C_2 \\
 C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline C_3 \leftarrow C_3 + 3C_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3 - C_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

**Solution 19**

1. Comme  $A_n^T = -A_n$ ,  $\det(A_n) = (-1)^n \det(A_n)$ . Comme  $n$  est impair,  $\det(A_n) = 0$  et  $A_n$  n'est pas inversible.
2. On procède par pivot de Gauss : on effectue les mêmes opérations sur les lignes de  $A_n$  et  $I_n$ . Commençons par effectuer les opérations  $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$  pour  $i$  variant de 1 à  $n$ . Ainsi  $A_n$  est transformé en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice  $I_n$  est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si  $n$  est impair, on effectue l'opération  $L_n \leftarrow L_1 + L_3 + \dots + L_{n-2}$  et  $A_n$  est alors transformée en une matrice dont la dernière ligne est nulle.  $A_n$  n'est donc pas inversible.
- Si  $n$  est pair, on effectue l'opération  $L_n \leftarrow L_1 + L_3 + \dots + L_{n-1}$ . Ainsi  $A_n$  est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice  $I_n$  est transformée en :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue enfin les opérations  $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$  pour  $i$  variant de  $n-1$  à 1.  $A_n$  est alors transformée en  $I_n$  et  $I_n$  est transformée en

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution 20**

On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ . On va effectuer les mêmes opérations sur les lignes de  $A_n$  et  $I_n$ .

On effectue d'abord les opérations  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$  pour  $i$  variant de  $n$  à 2.  $A_n$  est alors transformée en la matrice triangulaire supérieure où tous les coefficients de la partie triangulaire supérieure sont égaux à 1 et  $I_n$  est transformée en la matrice avec une diagonale de 1, une sous-diagonale de  $-1$  et des 0 ailleurs.

On effectue ensuite les opérations  $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$  pour  $i$  variant de 1 à  $n-1$ .  $A$  est transformée en  $I_n$  et  $I_n$  est transformée en la matrice  $B_n$  formée d'une diagonale de 2, d'une sous-diagonale et d'une sur-diagonale de  $-1$  et de zéros partout ailleurs. Ceci prouve que  $A_n$  est inversible d'inverse  $B_n$ .

### Solution 21

Dans tout ce qui suit, on notera les vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. La première ligne de  $A_1$  étant nulle,  $A_1$  n'est pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_1)$  si et seulement si

$$-x_1 + x_2 = 0 \quad \text{et} \quad -2x_3 = 0,$$

ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_1) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de  $A_1$  sont colinéaires à  $e_2$  et la dernière à  $e_3$ , on a

$$\text{Im}(A_1) = \text{vect}(e_2, e_3) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A_1) = 2.$$

2. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

par  $L_1 \leftarrow -L_2$  et  $L_2 \leftarrow L_1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

continuons par  $L_3 \leftarrow (-L_3 + L_2)/3$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

puis  $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2 + L_3$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

La matrice  $A_2$  est donc inversible d'inverse

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

3. La dernière ligne de  $A_3$  étant la différence des deux premières, les lignes de la matrice forment une famille liée de  $\mathbb{R}^3$  et  $A_3$  n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_3)$  si et seulement si

$$-x_1 + x_2 = 0 \text{ et } 2x_3 = 0,$$

ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_3) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de  $A_1$  sont égales, on a

$$\text{Im}(A_3) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3),$$

et  $\text{rg}(A_3) = 2$ .

4. La deuxième ligne de  $A_4$  étant nulle,  $A_4$  n'est pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_4)$  si et seulement si  $2x_1 - x_3 = 0$ , ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_4) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1 + 2e_3, e_2).$$

Puisque toutes les colonnes de  $A_4$  sont colinéaires à la dernière, on a

$$\text{Im}(A_4) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_3 - e_1),$$

et  $\text{rg}(A_4) = 1$ .

5. La dernière ligne de  $A_5$  étant égale à la première, les lignes de la matrice forment une famille liée de  $\mathbb{R}^3$  et  $A_5$  n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_5)$  si et seulement si

$$-x_1 = 0 \text{ et } -x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_5) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_2 - e_3).$$

Puisque les deux dernières colonnes de  $A_5$  sont égales mais non colinéaires à la première, on a

$$\text{Im}(A_5) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2),$$

et  $\text{rg}(A_5) = 2$ .

6. Les première et troisième lignes de  $A_6$  étant nulles,  $A_6$  n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_6)$  si et seulement si  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ , ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_6) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3).$$

Puisque toutes les colonnes de  $A_6$  sont colinéaires à la première, on a

$$\text{Im}(A_6) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_2),$$

et  $\text{rg}(A_6) = 1$ .

7. La deuxième ligne de  $A_7$  étant nulle,  $A_7$  n'est pas inversible. Un vecteur colonne  $X$  appartient à  $\text{Ker}(A_7)$  si et seulement si  $-x_2 = 0$  et  $-2x_1 = 0$ , ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_7) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_3).$$

Puisque la dernière colonne de  $A_7$  est nulle et les deux autres non-colinéaires, on a

$$\text{Im}(A_7) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1, e_3),$$

et  $\text{rg}(A_7) = 2$ .

8. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

puis, en effectuant  $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur  $X$  appartient donc à  $\text{Ker}(A_8)$  si et seulement si

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + 2x_3 = 0,$$

ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(A_8) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{vect}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Puisque les deux premières colonnes de  $A_8$  ne sont pas colinéaires, on a

$$\text{Im}(A_8) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right],$$

donc  $\text{Im}(A_8) = \text{vect}(e_1 + e_2 + 5e_3, e_1 + 3e_2 + 3e_3)$ , et  $\text{rg}(A_8) = 2$ .

### Solution 22

1. Il est clair que le carré de la matrice vaut l'identité : elle est donc inversible et égale à son propre inverse.

2. Notons  $M$  la matrice de l'énoncé et  $U$  la matrice  $(1)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Puisque  $M + I_n = U$  et que  $U^2 = nU$ , on a

$$(M + I_n)^2 = n(M + I_n),$$

ie  $M^2 + (2 - n)M = (n - 1)I_n$ . Ainsi,

$$M \left( \frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1} I_n \right) = I_n.$$

La matrice  $M$  est donc inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1} I_n = \frac{U}{n-1} - I_n.$$

### Solution 23

1. On a clairement

$$(\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n + A) = (\mathbb{1}_n + A)(\mathbb{1}_n - A),$$

d'où après multiplication à droite et à gauche par l'inverse de  $\mathbb{1}_n + A$ ,

$$(\mathbb{1}_n + A)^{-1}(\mathbb{1}_n - A) = (\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n - A)^{-1}.$$

2. Soient  $X, Y$  deux vecteurs colonnes de taille  $n$ . D'après la question précédente, on a

$$(\mathbb{1}_n + B)X = Y$$

si et seulement si

$$X + (\mathbb{1}_n + A)^{-1}(\mathbb{1}_n - A)X = Y.$$

Puisque  $\mathbb{1}_n + A$  est inversible, ceci est encore équivalent à,

$$(\mathbb{1}_n + A)X + (\mathbb{1}_n - A)X = (\mathbb{1}_n + A)Y,$$

c'est-à-dire

$$X = \frac{\mathbb{1}_n + A}{2}Y.$$

La matrice  $\mathbb{1}_n + B$  est donc inversible d'inverse

$$\frac{\mathbb{1}_n + A}{2}.$$

## Solution 24

1. En effectuant *successivement* sur  $A$  les opérations

$$L_k \leftarrow L_k - L_{k+1}$$

pour  $k$  variant de 1 à  $n - 1$ , on *transforme* la matrice en  $I_n$ . La matrice est donc inversible et son inverse d'obtient en effectuant la même séquence d'opérations sur  $I_n$ , on a donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Une méthode d'inversion avec polynômes.

- D'après la définition du produit matriciel, pour tout  $0 \leq k \leq n - 1$ ,  $J^k$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la  $k + 1$ -ième diagonale qui valent 1.
- La matrice  $J$  est nilpotente d'indice  $n$  (ie  $J^n = 0$  et  $J^{n-1} \neq 0$ ). On a

$$A = I_n + J + \dots + J^{n-1}.$$

c. Posons

$$P(X) = 1 + X + \dots + X^n.$$

On a  $A = P'(J)$ . On remarque que

$$(1 - X)P(X) = 1 - X^{n+1}.$$

Ainsi, en substituant  $J$  à  $X$  dans cette égalité polynomiale,

$$(I_n - J)P(J) = I_n$$

donc  $(I_n - J)A = I_n$  et  $A$  est inversible d'inverse

$$I_n - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution 25**

Effectuons des pivots en miroir :

1. En avant :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

On obtient par  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -17 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

puis  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 / -7$  et  $L_3 \leftarrow -L_3 / 11$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array} \right]$$

Effectuons alors  $L_2 \leftarrow L_2 - (3/7)L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -8/11 & 4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array} \right]$$

et finalement, par  $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & -5/77 & 19/77 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \end{array} \right].$$

Ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut

$$\begin{pmatrix} 1/7 & -5/77 & 19/77 \\ 2/7 & -17/77 & 3/77 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

2. Let's pivot!

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

On obtient en échangeant  $L_1$  et  $L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

puis  $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array} \right]$$

puis  $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - 6L_3$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -30 & 55 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array} \right]$$

et finalement, par  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -19 & 35 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -9 & 1 \end{array} \right].$$

Ainsi la matrice est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} -19 & 35 & -4 \\ 11 & -20 & 2 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Kein problem...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Permutons les lignes  $L_1$  et  $L_3$  et multiplions la nouvelle première ligne par  $-1$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Effectuons  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

et par  $L_3 \leftarrow -(L_3 - 2L_1)/3$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array} \right]$$

et par  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array} \right]$$

et finalement  $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array} \right]$$

ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut :

$$\begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

### 4. Pivotons.

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Effectuons les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ,  $L_3 \leftarrow -L_3 + L_1$ ,  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

puis  $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/3$  et  $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

et par  $L_4 \leftarrow (L_4 - 5L_3)/11$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array} \right]$$

puis  $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_4$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 17/33 & 4/33 & 20/33 & -4/11 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 46/33 & -28/33 & 25/33 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array} \right]$$

et  $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -16/33 & 37/33 & -13/33 & -4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array} \right]$$

et finalement  $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/33 & -17/33 & 47/33 & 6/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{array} \right]$$

donc la matrice est inversible d'inverse :

$$\begin{pmatrix} 2/33 & -17/33 & 47/33 & 6/11 \\ -3/11 & 9/11 & -10/11 & -5/11 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 4/33 & -1/33 & -5/33 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

## Solution 26

1. Un calcul donne  $A^3 - A = 4\mathbb{I}_3$ .

2. On a

$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_3,$$

ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Image et noyau

### Solution 27

---

1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) = \text{vect}((0, 0, 1))$$

2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((1, 1, 1), (-1, 1, 2)) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) = \{0\}$$

3.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) = \text{vect}((3, 1, 0), (2, 0, -1))$$

4.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(1, 2X, 3X^2) = \mathbb{R}_2[X] \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) = \text{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$$

### Solution 28

---

On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- Après tout calcul, on trouve

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$

- De même,

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(2e_1 - e_2 - e_3, -e_1 + 2e_2 - e_3).$$

- Comme  $A^2 = A$ ,  $f$  est un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

### Solution 29

---

Pour trouver des bases de l'image et du noyau, on pivote en colonnes sur la matrice suivante :

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc}
 -11 & 7 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 11 & 2 \\
 1 & 0 & 7 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 -11 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 11 & 11 & 22 \\
 1 & 7 & 7 & 14 \\
 \hline
 1 & 7 & 0 & 3 \\
 0 & 11 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 11
 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_2 \leftarrow 11C_2 + 7C_1 \\ C_4 \leftarrow 11C_4 + 3C_1 \end{array} \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 -11 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 11 & 0 & 0 \\
 1 & 7 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 7 & -7 & -11 \\
 0 & 11 & -11 & -22 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 11
 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2 \end{array} \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 -11 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 11 & 0 & 0 \\
 1 & 7 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 7 & -7 & -1 \\
 0 & 11 & -11 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) C_4 \leftarrow \frac{C_4}{11}
 \end{array}$$

Par conséquent,  $\left( \left( \begin{array}{c} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$  est une base de Ker A et  $\left( \left( \begin{array}{c} -11 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 11 \\ 7 \end{array} \right) \right)$  est une base de Im A.

Pour trouver des systèmes d'équations cartésiennes de l'image et du noyau, on pivote en lignes sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 77 & 14 & | & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ \end{matrix}$$

Ainsi un système d'équations cartésiennes minimal de  $\text{Ker } A$  est

$$\begin{cases} -11x + 7y + 3z = 0 \\ y + 11z + 2t = 0 \end{cases}$$

et une équation cartésienne de  $\text{Im } A$  est

$$x - 7y + 11z = 0$$

### Solution 30

Notons  $E_1, E_2, E_3, E_4$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$  et  $C_1, C_2, C_3, C_4$  les colonnes de  $A$ . On a donc  $AE_i = C_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . On remarque que  $C_3 = 0$  et que  $C_4 = -2C_1$ . Enfin,  $C_2$  et  $C_1$  ne sont pas proportionnelles donc  $(C_1, C_2)$  est une base de  $\text{Im } A$ . Comme  $C_3 = 0$ , on a  $E_3 \in \text{Ker } A$ . Comme  $2C_1 + C_4 = 0$ ,  $2E_1 + E_4 \in \text{Ker } A$ . Ainsi  $\text{vect}(E_3, 2E_1 + E_4) \subset \text{Ker } A$ . D'après le théorème du rang matriciel,  $\dim \text{Ker } A = 2$ . Donc  $\text{Ker } A = \text{vect}(E_3, 2E_1 + E_4)$  et  $(E_3, 2E_1 + E_4)$  est une base de  $\text{Ker } A$ .

## Rang

### Solution 31

Déterminons le rang de  $A$  par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Effectuons la permutation  $L_1 \leftrightarrow L_2$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

puis  $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ ,  $L_3 \leftrightarrow L_3 - aL_1$  et  $L_4 \leftrightarrow L_4 - 4L_1$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1+a & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L_3 \iff L_3 - 2L_2, L_4 \iff L_4 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5+a & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les deux dernières lignes de cette matrices sont liées si et seulement si

$$\begin{vmatrix} -5+a & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5a + 10 = 0,$$

ie  $a = 2$ .

- Cas 1 :  $a \neq 2$ . Le rang vaut 4.
- Cas 2 :  $a = 2$ . Le rang vaut 3.

### Solution 32

1. Comme  $\dim(\text{Im}(M)) = 1$ , il existe un vecteur colonne non nul  $U$  tel que  $\text{Im}(M) = \text{vect}(U)$ . Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , il existe  $v_j \in \mathbb{R}$  tel que la  $j$ -ième colonne de  $M$  soit égale à  $v_j U$ . En notant  $V$  le vecteur colonne de composantes  $v_1, \dots, v_n$ , on a bien  $M = UV^T$ .
2. Pour tout  $n \geq 2$ , par associativité du produit matriciel :

$$M^n = U(V^T U)^{n-1} V^T.$$

Or  $V^T U$  est la matrice de taille 1 égale à  $(\text{tr}(M))$ . Ainsi :

$$\forall n \geq 2, M^n = (\text{tr}(M))^{n-1} M.$$

3. D'après le calcul précédent, une matrice  $M$  de rang 1 est une matrice de projection si et seulement si  $\text{tr}(M) = 1$ .
4. D'après ce qui précède, une matrice  $M$  de rang 1 est nilpotente si et seulement si  $\text{tr}(M) = 0$ .

### Solution 33

Soit  $X \in \text{Ker } A$ . On a donc  $AX = 0$  puis  $A^T AX = 0$  donc  $X \in \text{Ker } A^T A$ . Ainsi  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$ .

Soit maintenant  $X \in \text{Ker } A^T A$ . On a donc  $A^T AX = 0$  puis  $X^T A^T AX = 0$ . Notons  $Y = AX$ . Ainsi  $Y^T Y = 0$ . Or  $Y^T Y$  est la somme des carrés des composantes de  $Y$  donc  $Y = 0$  i.e.  $AX = 0$ . D'où  $X \in \text{Ker } A$ . Ainsi  $\text{Ker } A^T A \subset \text{Ker } A$ .

Finalement,  $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T A$  et  $\text{rg } A = \text{rg } A^T A$  via le théorème du rang ( $A$  et  $A^T A$  ont le même nombre de colonnes). En changeant  $A$  en  $A^T$ , on a également  $\text{rg } A^T = \text{rg } AA^T$ . Or  $\text{rg } A = \text{rg } A^T$ . Ainsi  $\text{rg } A^T A = \text{rg } AA^T = \text{rg } A$ .

### Solution 34

1. Supposons qu'il existe  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $f(A) = 0$ . Alors pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = f(MA^{-1}A) = f(MA^{-1})f(A) = 0$ , ce qui contredit le fait que  $f$  est non constamment nulle.
2.
  - a. Soit  $A_i$  diagonale, dont les  $r+1$  premiers éléments diagonaux valent 1, à l'exception du  $i^{\text{ème}}$  nul, ainsi que tous les autres éléments diagonaux (ceci a du sens car  $r < n$ ). Le rang de  $A_i$  est clairement égal à  $r$  qui est le rang de  $A$  :  $A_i$  est donc équivalente à  $A$  ; par ailleurs,  $\prod_{k=1}^{r+1} A_k = 0$ .
  - b.  $f(0) = f(0 \times 0) = f(0)^2$  donc  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$ . On ne peut avoir  $f(0) = 1$  sinon pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = f(M)f(0) = f(M \times 0) = f(0) = 1$ , ce qui contredit le fait que  $f$  n'est pas constamment égale à 1. Ainsi  $f(A_1) \dots f(A_{r+1}) = f(0) = 0$  ; l'un des  $f(A_i)$  est donc nul. Or il existe des matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = PA_i Q$ , ce qui donne  $f(A) = 0$ .
3. Ainsi,  $f$  est nulle sur les matrices non inversibles, et par ailleurs induit un morphisme de groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{R}^*$ . Exemple : le déterminant (qu'on peut composer avec un morphisme de  $\mathbb{R}^*$  dans lui-même, par exemple  $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^* \dots$ )

**Solution 35**

On a  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  donc  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) \geq 1$ . Ainsi  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ . Donc  $\text{rg}(A - \lambda I_n)^T < n$  i.e.  $\text{rg}(A^T - \lambda I_n) < n$ . Par conséquent,  $\dim \text{Ker}(A^T - \lambda I_n) \geq 1$ . Ainsi il existe  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nul tel que  $A^T V = \lambda V$ .

**Solution 36**

Supposons  $\text{rg}(M) = r$ . Il existe donc des matrices  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $M = PJ_r Q$  avec  $J_r = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ . Notons  $X_1, \dots, X_n$  les colonnes

de  $P$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  les colonnes de  $Q^T$ . On vérifie alors que  $M = X_1 Y_1^T + \dots + X_r Y_r^T$ . Les colonnes de  $P$  et  $Q^T$  forment des familles libres puisque ces matrices sont inversibles. A fortiori, les sous-familles  $(X_1, \dots, X_r)$  et  $(Y_1, \dots, Y_r)$  sont libres.

Réciproquement soient  $(X_1, \dots, X_r)$  et  $(Y_1, \dots, Y_r)$  deux familles libres de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On peut les compléter respectivement en des bases  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Notons  $P$  la matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont  $X_1, \dots, X_n$  et  $Q$  la matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  dont les lignes sont  $Y_1^T, \dots, Y_n^T$ . Puisque  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  sont des bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , les matrices  $P$  et  $Q$  sont inversibles. On vérifie que  $M = PJ_r Q$  de sorte que  $M$  est de rang  $r$ .

**Changement de base****Solution 37**

1. Les ensembles des solutions des équations  $AX = 0$ ,  $AX = X$  et  $AX = 2X$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  sont respectivement

$$\text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En choisissant

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$\varepsilon_2 = e_2 - e_3$$

$$\varepsilon_3 = e_1 + e_3$$

on a alors

$$f(\varepsilon_1) = 0_E$$

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$$

$$f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$$

Comme la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est clairement une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}$  est également une base de  $E$ . Dans cette base, la matrice de  $f$  est  $D$ .

2. Il suffit de prendre pour  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ , autrement dit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$3. \text{ On calcule } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1} - 1 & -2^n & 1 - 2^n \end{pmatrix}.$$

4. Il suffit de remarquer qu'en posant  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ , on a  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$X_n = A^n X_0$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$x_n = 2^{n+1}$$

$$y_n = 1$$

$$z_n = 2^{n+1} - 1$$

**Solution 38**

1. Les vecteurs  $u$  et  $v$  n'étant pas colinéaires,  $\mathcal{B}$  est libre. Comme  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

2. On a bien-sûr

$$\text{mat}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour inverser P...

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Par l'opération  $L_2 \leftrightarrow (-L_2 + L_1)/2$ ,

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$ ,

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right].$$

L'inverse de  $\text{mat}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})$  vaut donc

$$\text{mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

**Solution 39**

1. On a bien-sûr

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right].$$

La famille  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  est donc libre. Puisque  $\dim(E) = 3$ ,  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

3. On a

$$P = \text{mat}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invertissons P par la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

par  $L_1 \leftrightarrow L_2$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

continuons par  $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/2$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_2 \leftrightarrow -L_2 + L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right].$$

L'inverse de P vaut donc

$$P^{-1} = \text{mat}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. On a, après tout calcul,

$$f(f_1) = (-1, 2, 1), \quad f(f_2) = (-2, -1, -3), \quad f(f_3) = (1, 1, 2).$$

En résolvant u système voire en tâtonnant un peu, on trouve sans peine que

$$f(f_1) = f_1 + 2f_2 + f_3, \quad f(f_2) = 2f_1 - f_2 - 3f_3,$$

et  $f(f_3) = -f_1 + f_2 + 2f_3$ . D'où

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. D'après la formule du changement de base, on a

$$M = PM'P^{-1}.$$

#### Solution 40

1. Après des calculs élémentaires, on trouve

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}((-3, -2, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$$

puis

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((1, 1, -1, 1), (2, -1, 1, 0))$$

et

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \text{vect}((1, 1, -1, 1)).$$

2. Par un pivot de Gauss élémentaire, on trouve

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

ainsi  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

3. Après tout calcul,

$$\text{mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Représentation des applications linéaires

### Solution 41

1. Comme  $A, P \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\deg(AP) \leq 4$ . Ainsi  $\deg(AP)'' \leq 2$  i.e.  $f(P) \in E$ .

2.  $f(1) = 2c$ ,  $f(X) = 2b + 6cX$ ,  $f(X^2) = 2a + 6bX + 12cX^2$ . Ainsi  $M = \begin{pmatrix} 2c & 2b & 2a \\ 0 & 6c & 6b \\ 0 & 0 & 12c \end{pmatrix}$ .

3.  $\det M = 144c^3$ . Ainsi  $M$  est inversible si et seulement si  $c \neq 0$  i.e.  $\deg A = 2$ .

4. On a alors  $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $c = 0$ . Ainsi  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ . On sait que les coefficients diagonaux d'un produit de matrice triangulaire sont

les produits des coefficients diagonaux. De plus, on voit sur quelques exemples que les coefficients de la surdiagonale de  $M$  sont nuls.

On est donc amené à formuler l'hypothèse de récurrence  $HR(n)$  suivante :  $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & a_n \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$ .  $HR(0)$  est évidemment vraie. On

suppose  $HR(n)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .  $M^{n+1} = M^n \cdot M$ . Comme  $M^n$  et  $M$  sont triangulaires supérieures,  $M^{n+1}$  est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de  $M^{n+1}$  sont  $2^{n+1}$ ,  $6^{n+1}$  et  $12^{n+1}$ . On s'aperçoit également que les coefficients de la surdiagonale de  $M^{n+1}$  sont nuls.  $M^{n+1}$  est bien de la forme annoncé et on obtient en plus,  $a_{n+1} = 2^{n+1} + 12a_n = 2a_n + 2 \cdot 12^n$ . Ainsi  $a_n = \frac{12^n - 2^n}{5}$ . Donc  $HR(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et on obtient en sus une expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ . Par conséquent,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & \frac{12^n - 2^n}{5} \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$$

La formule devrait être vraie pour  $n$  négatif. Prenons donc  $n = -1$  dans la formule précédente. On vérifie que la matrice ainsi obtenue est bien l'inverse de  $M$ . Ainsi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

### Solution 42

1. Les applications  $P \mapsto P(X+a)$  pour  $a \in \mathbb{R}$  sont linéaires. Donc  $f$  est bien linéaire comme somme d'applications linéaires.

De plus,  $\deg P(X+a) = \deg P$  pour  $a \in \mathbb{R}$ . Donc  $\deg f(P) \leq \max(\deg P(X+1), \deg P(X-1), \deg P) = \deg(P)$ .

Ainsi  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

2. Des calculs élémentaires donnent ;

$$f(1) = 0$$

$$f(X) = (X+2) + X - 2(X+1) = 0$$

$$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = 2$$

$$f(X^3) = (X+2)^3 + X^3 - 2(X+1)^3 = 6X + 6$$

La matrice de  $f$  dans la base canonique est donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Il est alors clair que  $\text{Ker } f = \text{Im } f = \text{vect}(1, X)$ .

3. Posons  $P_3 = X^2$ ,  $P_4 = X^3$ ,  $P_1 = f(X^2) = 2$  et  $P_2 = f(X^3) = 6X + 6$ . La famille  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  car c'est une famille de quatre polynômes à degrés échelonnés.  $P_1$  et  $P_2$  appartiennent au noyau de  $f$ . Il est alors clair que la matrice de  $f$  dans la base  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est de la forme voulue.

### Solution 43

1. Il est clair que  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $f$  est linéaire par linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.  $f$  est donc un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2.  $f$  est une symétrie si et seulement si  $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ . Or

$$\begin{aligned} f^2(X) &= X + \text{tr}(AX)B + \text{tr}(A(X + \text{tr}(AX)B))B = X + \text{tr}(AX)B + \text{tr}(AX + \text{tr}(AX)AB)B \\ &= X + (2 \text{tr}(AX) + \text{tr}(AX) \text{tr}(AB))B = X + \text{tr}(AX)(2 + \text{tr}(AB))B \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est une symétrie si et seulement si  $\text{tr}(AX)(2 + \text{tr}(AB))B = 0$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

- $B = 0$ ;
  - $\text{tr}(AB) = -2$ ;
  - $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AX) = 0$  ce qui équivaut à  $A = 0$  (prendre pour  $X$  les éléments de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).
3. Si  $A = 0$  ou  $B = 0$ , alors  $f = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$  donc la base de  $f$  est  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et sa direction est le sous-espace nul. Supposons maintenant  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ ; on a donc  $\text{tr}(AB) = -2$ . La base de  $f$  est  $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ . Or

$$X \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \iff \text{tr}(AX)B = 0 \iff \text{tr}(AX) = 0 \text{ car } B \neq 0$$

La direction de  $f$  est  $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ . Soit  $X \in \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ . Alors  $2X = \text{tr}(AX)B$  et donc  $X \in \text{vect}(B)$ . Réciproquement soit  $X \in \text{vect}(B)$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $X = \lambda B$ . Alors  $f(X) = \lambda B + \lambda \text{tr}(AB)B = -\lambda B = -X$  car  $\text{tr}(AB) = -2$ . Donc  $f(X) = -X$ . La base de  $f$  est donc le noyau de la forme linéaire  $X \mapsto \text{tr}(AX)$  non nulle car  $A \neq 0$  : c'est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La direction de  $f$  est  $\text{vect}(B)$  : c'est une droite vectorielle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Solution 44

Supposons que  $n$  soit pair et qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans la base soit  $A = \left( \begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array} \right)$ . Un

calcul par blocs montre que  $A^2 = 0$  et donc  $f^2 = 0$ . Par conséquent,  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ . Par ailleurs, il est clair que  $\text{rg } A = p$  et donc  $\text{rg } f = p$ . Mais d'après le théorème du rang,  $\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$  donc  $\dim \text{Ker } f = p = \dim \text{Im } f$ . Mais puisqu'on a déjà  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ , on peut conclure que  $\text{Im } f = \text{Ker } f$ .

Supposons maintenant que  $\text{Im } f = \text{Ker } f$ . Le théorème du rang assure alors que  $n$  est pair et que  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f = p$  où  $n = 2p$ . Soit  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base d'un supplémentaire  $S$  de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ . Posons  $e_i = f(e_{p+i})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Puisque  $f$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } f$  et que  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $S$ ,  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $\text{Im } f$  et donc de  $\text{Ker } f$ . Récapitulons :  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $\text{Ker } f$ ,  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $S$  et  $E = \text{Ker } f \oplus S$  donc  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Il est alors clair que la matrice de  $f$  dans cette base est de la forme voulue.

### Solution 45

1. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $E_n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} T_n(P + \lambda Q) &= (nX + 1)(P + \lambda Q) + (1 - X^2)(P + \lambda Q)' \\ &= (nX + 1)(P + \lambda Q) + (1 - X^2)(P' + \lambda Q') \\ &= (nX + 1)P + (1 - X^2)P' + \\ &\quad \lambda[(nX + 1)Q + (1 - X^2)Q'] \\ &= T_n(P) + \lambda T_n(Q) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation et du produit. Vérifions que le degré de  $T_n(P)$  est inférieur ou égal à  $n$  lorsque  $P \in E_n$ . Un tel polynôme s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^n p_k X^k,$$

et donc

$$P' = \sum_{k=1}^n k p_k X^{k-1}.$$

Le polynôme  $(1 + nX)P$  est donc de degré au plus  $n + 1$  et le coefficient de  $X^{n+1}$  dans ce polynôme vaut  $n p_n X^{n+1}$ . De même, le polynôme  $(1 - X^2)P'$  est donc de degré au plus  $n + 1$  et le coefficient de  $X^{n+1}$  dans ce polynôme vaut  $n p_n X^{n+1}$ . Par différence,  $T_n(P)$  est de degré au plus  $n$ .

2. On a, pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} T_n(X^k) &= (nX + 1)X^k + (1 - X^2)kX^{k-1} \\ &= kX^{k-1} + X^k + (n - k)X^{k+1} \end{aligned}$$

On a donc

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & n-1 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Lorsque  $n = 3$ , on a

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons le noyau de  $M_3$  par la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

puis  $L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)/3$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

appartient donc à  $\text{Ker}(M_3)$  si et seulement si

$$x_1 + x_2 = -x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0,$$

ie  $X$  est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\text{Ker}(M_3) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

et donc

$$\text{Ker}(T_3) = \text{vect}(1 - X - X^2 + X^3).$$

D'après le théorème du rang,  $\text{rg}(M_3) = 3$ . Les trois premières colonnes de  $M_n$  formant manifestement une famille libre, on a

$$\text{Im}(M_3) = \text{vect} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

et donc

$$\text{Im}(T_3) = \text{vect}(1 + 3X, 1 + X + 2X^2, 2X + X^2 + X^3).$$

#### Solution 46

1. Soient  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'après la structure d'algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_A(M + \lambda N) &= A(\lambda M + N) \\ &= A(\lambda M) + AN \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N) \end{aligned}$$

ainsi  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Une matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartient à  $\text{Ker}(\varphi_A)$  si et seulement si

$$\varphi_A(M) = \begin{pmatrix} 2z - 2y & -2x - 3y + 2t \\ 2x + 3z - 2t & 2y - 2z \end{pmatrix} = 0,$$

ie

$$z - y = 2x + 3z - 2t = 0.$$

Les éléments du noyau de  $\varphi_A$  sont donc les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} t - \frac{3}{2}z & z \\ z & t \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, l'image de  $\varphi_A$  est de dimension 2. Puisque qu'elle est engendrée par l'image de la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et que

$$\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

forment une famille libre, une base de  $\text{Im}(\varphi_A)$  est

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

3. Le commutant de A est égal au noyau de  $\varphi_A$ . Or, d'après les calculs précédents, une matrice M appartient à  $\text{Ker}(\varphi_A)$  si et seulement si il existe deux réels t et z tels que

$$M = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Solution 47

1. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Puisque  $P'$  est alors de degré au plus un,  $f(P)$  est de degré au plus deux donc appartient à  $\mathbb{R}_2[X]$ . L'application  $f$  est clairement linéaire par linéarité de la dérivation sur  $\mathbb{R}_2[X]$  : on a bien  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ .

2. On a clairement

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 1 + X, \quad f(X^2) = 2X + X^2.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice M étant clairement de rang 3,  $f$  est un automorphisme de E. Inversons M par la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

par  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

puis, en effectuant  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ ,

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

L'inverse de M vaut donc

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Notons U le vecteur colonne des coordonnées du polynôme  $P = f^{-1}(1 + X + X^2)$  dans la base canonique de E. Puisque le vecteur colonne des coordonnées de  $1 + X + X^2$  dans la base canonique de E est

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a  $U = M^{-1}V$ , c'est-à-dire

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc  $P = 2 - X + X^2$ .

### Solution 48

1. Notons  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Il est clair que  $\text{rg}(f) = 2$  avec

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(e_1) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = \text{vect}(e_1, e_2 + e_3).$$

2. On a clairement

$$A^2 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(f^2) = \text{vect}(e_1, e_2) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^2) = \text{vect}(3e_1 + e_2 + e_3).$$

3. On a

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(f^2)) = 1$$

et  $\text{Im}(f^2) = \text{vect}(3e_1 + e_2 + e_3)$  avec

$$3e_1 + e_2 + e_3 \notin \text{vect}(e_1, e_2) = \text{Ker}(f^2)$$

donc  $\text{Ker}(f^2) \cap \text{Im}(f^2) = \{0\}$ . On en déduit que  $\text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Im}(f^2)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Solution 49

1. Pour tous polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$f(P + \lambda Q) = X(P(X) + \lambda Q(X)) = XP(X) + \lambda XQ(X) = f(P) + \lambda f(Q)$$

d'après les règles de calculs dans l'algèbre  $\mathbb{R}[X]$ . La dérivation est linéaire d'après le cours, ainsi  $g$  est linéaire. Comme

$$h(1) = 1 \quad \text{mais} \quad h(2 \times 1) = 2 \neq 2h(1) = 2,$$

$h$  n'est pas linéaire.

2. L'application  $f$  est clairement injective car  $XP(X) = 0$  équivaut par intégrité de  $\mathbb{R}[X]$  à  $P = 0$ , d'où  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ . En revanche,  $f$  n'est pas surjective car

$$\text{Im}(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\} \neq \mathbb{R}[X].$$

L'application  $g$  est surjective car tout polynôme admet un polynôme primitif d'après le cours. En revanche,  $g$  n'est pas injective car

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}.$$

On a

$$\dim(\text{Ker}(g)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 0.$$

3. Puisque

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg(f(P)) = 1 + \deg(P) \leq n + 1,$$

et

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg(g(P)) \leq \deg(P) \leq n,$$

on a

$$\text{Im}(f_n) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(g_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$$

4. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on a

$$f_n(X^k) = X^{k+1} \text{ et } g_n(X^k) = kX^{k-1},$$

avec la convention  $g_n(X^0) = 0$ . Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}}(f_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Les matrices de  $f_n$  et  $g_n$  calculées précédemment sont respectivement clairement de rang  $n$  et  $n - 1$ . Ainsi,

$$\text{rg}(f_n) = n \text{ et } \text{rg}(g_n) = n - 1.$$

### Solution 50

1. Soient  $P, Q$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) + (P + \lambda Q)(X - 1) - 2(P + \lambda Q)(X) \\ &= P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) + P(X - 1) + \lambda Q(X - 1) - 2P(X) - 2\lambda Q(X) \\ &= P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X) + \lambda(Q(X + 1) + Q(X - 1) - 2Q(X)) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est linéaire. On remarque que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a

$$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P(X - 1)), \deg(P(X))) = \deg(P) \leq n.$$

Ainsi  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_n[X]$ .

2. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on a

$$f(X^k) = (X + 1)^k + (X - 1)^k - 2X^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (1 + (-1)^\ell) X^{k-\ell}$$

avec la convention  $\sum_{\emptyset} = 0$ . Ainsi, pour  $n = 3$ , on obtient

$$\text{mat}_{(1, \dots, X^3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $n$  entier naturel non nul quelconque, on a

$$\text{mat}_{(1, \dots, X^n)}(f) = A = (a_{\ell, k})_{1 \leq \ell, k \leq n+1}$$

avec  $A$  triangulaire supérieure stricte définie par

$$\forall 1 \leq \ell < k \leq n + 1, \quad a_{\ell, k} = \binom{k-1}{k-\ell} (1 + (-1)^{k-\ell}).$$

3. D'après les calculs précédents, pour tout  $n \geq 3$ ,

- Les deux premières colonnes de  $A$  sont nulles et les autres forment une famille libre en tant que système de vecteurs-colonnes échelonné. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X] \text{ et } \text{Im}(f) = \text{vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

- On a clairement

$$\text{rg}(f) = n - 1 \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) = 2.$$

4. Soient  $Q \in \text{Im}(f)$  : il existe  $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $f(P_0) = Q$ . Pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , on a  $f(P) = Q$  si et seulement si

$$f(P) = f(P_0)$$

ie  $P - P_0 \in \text{Ker}(f)$ . Or,

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1, X).$$

Ainsi  $f(P) = Q$  si et seulement si il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$P = P_0 + a + bX.$$

Comme le système

$$\begin{cases} P(0) = P_0(0) + a = 0 \\ P'(0) = P_0'(0) + b = 0 \end{cases}$$

admet l'unique solution  $(a, b) = -(P(0), P'(0))$ , il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0.$$

### Solution 51

Notons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. On a

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Après tout calcul, on obtient

- $\text{Ker}(L) = \text{vect}(3e_1 - e_2 + e_3)$ , de dimension un.
- $\text{Im}(L) = \text{vect}(e_1 + e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ , de dimension deux.
- $\text{Ker}(L) \cap \text{Im}(L) = \{0\} = \text{vect}(\emptyset)$ , de dimension nulle.

3. La matrice de  $L^2$  dans  $\mathcal{B}$  vaut

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Celle de  $L^3$  vaut

$$M^3 = 3M.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}}(L^{16}) &= M^{16} = M^{3 \times 5 + 1} \\ &= (M^3)^5 M = (3M)^5 M \\ &= 3^5 M^{2 \times 3} = 3^5 (3M)^2 \\ &= 3^{5+2} M^2 = 3^7 M^2 \end{aligned}$$

### Solution 52

1. Pour toutes matrices  $M$  et  $M'$  et pour tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu$ , on a  $\Phi(\lambda M + \mu M') = A(\lambda M + \mu M') = \lambda AM + \mu AM' = \lambda \Phi(M) + \mu \Phi(M')$ , donc  $\Phi$  est linéaire.
2. On vérifie facilement que  $A$  est inversible, donc on peut définir l'application  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  $\Psi(M) = A^{-1}M$ .  $\Psi$  est linéaire pour la même raison que  $\Phi$ , et pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  on a  $\Psi(\Phi(M)) = A^{-1}AM = M$  et  $\Phi(\Psi(M)) = AA^{-1}M = M$ , donc  $\Phi$  est un isomorphisme d'application inverse  $\Phi^{-1} = \Psi$ .
3. Avec les notations du cours, la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est constituée des quatre matrices  $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On calcule les images de ces quatre matrices par  $\Phi$ , et on les décompose dans cette même base :

$$\begin{aligned} \Phi(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{2,1}, & \Phi(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{1,2} + 3E_{2,2} \\ \Phi(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 4E_{2,1}, & \Phi(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} + 4E_{2,2}. \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de  $\Phi$  dans cette base  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### Solution 53

1. On vérifie sans difficulté que pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$  et tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a  $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$ , ce qui prouve la linéarité de  $\phi$ .  
Par ailleurs, si  $P$  est de degré inférieur ou égal à 3, alors  $P(X+1)$  l'est aussi et donc  $\phi(P)$  aussi : ainsi on a bien  $\phi(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$ , et  $\phi$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. On calcule les images des quatre polynômes  $1, X, X^2$  et  $X^3$  de la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{cases} \phi(1) &= 1 + 1 &= 2 \\ \phi(X) &= X + 1 + X &= 2X + 1 \\ \phi(X^2) &= (X + 1)^2 + X^2 &= 2X^2 + 2X + 1 \\ \phi(X^3) &= (X + 1)^3 + X^3 &= 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \end{cases}$$

On en déduit donc :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. a.  $M$  est une matrice triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible. Pour calculer son inverse, on fixe  $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$  et on résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= y_2 \\ 2x_3 + 3x_4 &= y_3 \\ 2x_4 &= y_4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 - x_2 - x_3 - x_4) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(y_2 - 2x_3 - x_4) \\ x_3 &= \frac{1}{2}(y_3 - 3x_4) \\ x_4 &= \frac{1}{2}y_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{4}y_4) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \\ x_3 &= \frac{1}{2}(y_3 - \frac{3}{2}y_4) \\ x_4 &= \frac{1}{2}y_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que  $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- b. Puisque la matrice  $M$  de  $\phi$  dans  $\mathcal{B}$  est inversible,  $\phi$  est bijective, donc c'est un automorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ . De plus on sait que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi^{-1}) = M^{-1}$ .
4. Notons  $P_0$  le polynôme  $4X^3 - 2X^2 + X - 1$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , on a  $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1 \iff \phi(P) = P_0 \iff P = \phi^{-1}(P_0)$ ; l'équation admet donc l'unique solution  $\phi^{-1}(P_0)$ , dont on calcule les coefficients en passant par  $M^{-1}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi^{-1}(P_0)) = M^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'unique solution cherchée est  $2X^3 - 4X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}$ .

### Solution 54

1. a. Notons (H) l'hypothèse que  $\forall x \in \mathbb{R}, axe^x + bxe^{-x} + ce^x + de^{-x} = 0$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} bxe^{-x} + de^{-x} = 0$ , donc en prenant la limite en  $+\infty$ , on déduit de (H) que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + c)e^x = 0$ . Si  $a \neq 0$ , on sait qu'au voisinage de  $+\infty$ ,  $(ax + c)e^x \sim axe^x$ . Or si  $a > 0$ , (resp.  $a < 0$ ), on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} axe^x = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), ce qui est contradictoire avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + c)e^x = 0$ . On en conclut que  $a = 0$ , et il reste donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ce^x = 0$ , qui implique de même que  $c = 0$ .
- b. Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tels que  $ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4 = 0$ . Ceci équivaut à l'hypothèse (H) de la question précédente. On a vu qu'alors  $a = c = 0$ , donc il reste  $bg_2 + dg_4 = 0$ , c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{R}, (bx + d)e^{-x} = 0$ , ce qui équivaut à  $\forall x \in \mathbb{R}, bx + d = 0$  (puisque  $e^{-x} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ). Avec  $x = 0$  on obtient  $d = 0$ , puis en prenant par exemple  $x = 1$  on a aussi  $b = 0$ . Finalement  $a = b = c = d = 0$ , ce qui prouve que  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  est une famille libre. De plus c'est par définition une famille génératrice de  $F$ . On en conclut que c'est une base de  $F$ , et donc  $\dim F = 4$ .
2. a.  $g_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}, g_1'(x) = xe^x + e^x = g_1(x) + g_3(x)$ , donc  $g_1' = g_1 + g_3 \in F$ . De même,  $g_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}, g_2'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = -g_2(x) + g_4(x)$ , donc  $g_2' = -g_2 + g_4 \in F$ .
- b. Puisque la famille  $(g_1, g_2, g_1', g_2')$  est de cardinal 4 et que  $\dim F = 4$ , il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  quatre réels tels que  $\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_1' + \delta g_2' = 0$ . Ceci équivaut à  $(\alpha + \gamma)g_1 + (\beta - \delta)g_2 + \gamma g_3 + \delta g_4 = 0$ . Puisque la famille  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  est libre, cela implique que  $\alpha + \gamma = \beta - \delta = \gamma = \delta = 0$ , d'où  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ . Ainsi la famille  $(g_1, g_2, g_1', g_2')$  est libre et est donc une base de  $F$ .  
On a vu que  $g_1' = g_1 + g_3$  (resp.  $g_2' = -g_2 + g_4$ ) donc les coordonnées de  $g_1'$  (resp.  $g_2'$ ) dans  $\mathcal{B}_1$  sont  $(1, 0, 1, 0)$  (resp.  $(0, -1, 0, 1)$ ). On en déduit donc que la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $F$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Par définition, on a  $\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ . On en conclut que  $\varphi$  est linéaire.  
Puisque  $\text{Im}(\varphi) = \text{vect}(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \varphi(g_3), \varphi(g_4))$ , il suffit de montrer que  $\varphi(g_i) \in F$  pour tout  $1 \leq i \leq 4$  pour conclure que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $F$ .  
On a déjà vu que  $\varphi(g_1) = g_1' \in F$  et  $\varphi(g_2) = g_2' \in F$ . Par ailleurs, on a immédiatement  $\varphi(g_3) = g_3 \in F$  et  $\varphi(g_4) = -g_4 \in F$ , d'où la conclusion.

- b. On a déjà calculé les coordonnées de  $\varphi(g_1) = g'_1$  et  $\varphi(g_2) = g'_2$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ . Celles de  $\varphi(g_3) = g_3$  sont  $(0, 0, 1, 0)$  et celles de  $\varphi(g_4) = -g_4$  sont  $(0, 0, 0, -1)$ . On en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c. Puisque  $M$  est triangulaire inférieure avec que des éléments non nuls sur la diagonale, on sait que c'est une matrice inversible, ce qui implique que  $\varphi$  est un automorphisme de  $F$ .
- d. On applique la formule de changement de base :  $N = P^{-1}MP$ . Le calcul  $P^{-1}$  s'obtient très aisément par résolution d'un système triangulaire (ou par opérations élémentaires sur  $P$  et  $I_4$  en parallèle). On obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On sait sans aucun calcul que  $N$  est inversible, puisque c'est la matrice de l'automorphisme  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

### Solution 55

- Comme  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 + H_2$ , tout élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  – en particulier  $\text{Id}$  – peut s'écrire comme la somme d'un élément de  $H_1$  et d'un élément de  $H_2$ .
- On compose l'identité  $p_1 + p_2 = \text{Id}$  par  $p_1$  une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :

$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1$$

$$p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1$$

On additionne ces deux égalités de sorte que

$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$$

Mais comme  $p_1 \in H_1$  et  $p_2 \in H_2$ ,  $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$ . Ainsi  $2p_1^2 = 2p_1$  et finalement  $p_1^2 = p_1$ . Donc  $p_1$  est un projecteur. Quitte à échanger  $p_1$  et  $p_2$ , on démontre de même que  $p_2$  est un projecteur.

- Soit  $f \in H_1$ . On a donc  $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$ . Comme  $p_2$  est un projecteur, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $p_2$  est  $P_2 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array} \right)$  où  $r = \text{rg } p_2$ . Notons  $F = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  la matrice de  $f$  dans cette même base  $\mathcal{B}$  avec  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ . On a donc  $FP_2 + P_2F = 0$ , ce qui entraîne  $A = B = C = 0$ . Par conséquent,  $F = \left( \begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array} \right)$ . Notons  $\Phi$  l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . On a donc

$\Phi(H_1) \subset G$  où  $G$  est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme  $\left( \begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array} \right)$  où  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ . Par conséquent  $\dim H_1 \leq$

$\dim G$ . Or  $\dim G = (n-r)^2$ . Ainsi  $\dim H_1 \leq (n-r)^2 = (n - \text{rg } p_2)^2$ .

On prouve de la même manière que  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2$ .

- Comme  $H_1 \oplus H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\dim H_1 + \dim H_2 = n^2$ . On déduit de la question précédente que

$$n^2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2$$

Comme  $n - \text{rg } p_1 \geq 0$  et  $n - \text{rg } p_2 \geq 0$ ,

$$(n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2 \leq [(n - \text{rg } p_1) + (n - \text{rg } p_2)]^2 = [2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2$$

On sait que  $p_1 + p_2 = \text{Id}$ . Donc  $\text{rg}(p_1 + p_2) = n$ . Or c'est un exercice classique que de montrer que  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \geq \text{rg}(p_1 + p_2)$ . On en déduit que  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \geq n$ . De plus  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 \leq 2n$  donc

$$[2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 \leq n^2$$

Finalement,

$$n^2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2 \leq [2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 \leq n^2$$

On en déduit que  $[2n - (\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2)]^2 = n^2$  i.e.  $\text{rg } p_1 + \text{rg } p_2 = n$  et que  $n^2 = (n - \text{rg } p_1)^2 + (n - \text{rg } p_2)^2$ . Notons  $r = \text{rg } p_1$ . On a alors  $n^2 = (n - r)^2 + r^2$  i.e.  $r(n - r) = 0$ . Deux cas se présentent.

- Si  $r = 0$ , alors  $p_1 = 0$  et donc  $p_2 = \text{Id}$ . On a alors  $\dim H_1 \leq (n - \text{rg } p_2)^2 = 0$ . Donc  $H_1 = \{0\}$ . Par conséquent  $H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
- Si  $r = n$ , alors  $p_1 = \text{Id}$ . On a alors  $\dim H_2 \leq (n - \text{rg } p_1)^2 = 0$ . Donc  $H_2 = \{0\}$ . Par conséquent  $H_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

Réciproquement, on vérifie que ces deux couples  $(H_1, H_2)$  vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

### Solution 56

Puisque  $\text{Im } p_k \subset E$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=1}^n \text{Im } p_k \subset E$ . De plus,  $E = \text{Im Id}_E = \text{Im} \left( \sum_{k=1}^n p_k \right) \subset \sum_{k=1}^n \text{Im } p_k$ . Par double inclusion,  $\sum_{k=1}^n \text{Im } p_k = E$ .

Montrons maintenant que la somme est directe. Les  $p_k$  étant des projecteurs,  $\text{rg } p_k = \text{tr}(p_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus,  $\sum_{k=1}^n p_k = \text{Id}_E$  donc, par linéarité de la trace  $\sum_{k=1}^n \text{tr}(p_k) = \text{tr}(\text{Id}_E)$  ou encore  $\sum_{k=1}^n \text{rg}(p_k) = \dim E$ . C'est donc que les sous-espaces vectoriels  $\text{Im } p_1, \dots, \text{Im } p_n$  sont en somme directe.

### Solution 57

#### • Solution 1

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ . On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Im } \Phi &\longrightarrow \mathcal{L}(S, \text{Im } v) \\ g &\longmapsto g|_S^{\text{Im } v} \end{aligned}$$

Cette application est bien définie car, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Im}(v \circ f \circ u) \subset \text{Im } v$ . Montrons que c'est un isomorphisme.

Soit  $g \in \text{Ker } \Psi$ . Puisque  $g \in \text{Im } \Phi$ , il existe  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $g = v \circ f \circ u$ . Comme  $g \in \text{Ker } \Psi$ ,  $g|_S = 0$ . Mais on a aussi évidemment  $g|_{\text{Ker } u} = 0$ . Puisque  $E = \text{Ker } u \oplus S$ ,  $g = 0$  et  $\Psi$  est injective.

On sait que  $u$  induit un isomorphisme  $\tilde{u}$  de  $S$  sur  $\text{Im } u$ . De même,  $v$  induit un isomorphisme  $\tilde{v}$  de  $T$  sur  $\text{Im } v$  où  $T$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } v$  dans  $E$ . Soit  $\tilde{g} \in \text{Im } \Psi$ . On définit  $f$  de la manière suivante :  $f(x) = \tilde{v}^{-1} \circ \tilde{g} \circ \tilde{u}^{-1}(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$  et  $f = 0$  sur un supplémentaire quelconque de  $\text{Im } u$ . On a alors bien  $\Psi(v \circ f \circ u) = \tilde{g}$ , ce qui montre que  $\Psi$  est surjective.

Par conséquent,  $\text{rg } \Phi = \dim \mathcal{L}(S, \text{Im } v) = \text{rg } u \text{ rg } v$ .

#### • Solution 2

Notons  $S$  un supplémentaire de  $\text{Im } u$  dans  $E$  et  $T$  un supplémentaire de  $\text{Ker } v$  dans  $E$ . On pose

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E), S \subset \text{Ker } f, \text{Im } f \subset T\}.$$

On vérifie que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ . Montrons que  $\Phi$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Im } \Phi$ .

Soit  $f \in \mathcal{F} \cap \text{Ker } \Phi$ . Par définition de  $\mathcal{F}$ ,  $f|_S = 0$ . De plus,  $v \circ f \circ u = 0$  signifie que  $f(\text{Im } u) \subset \text{Ker } v$ . Mais, par définition de  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Im } f \subset T$ . Donc  $f(\text{Im } u) \subset \text{Ker } v \cap T = \{0\}$ . D'où  $f|_{\text{Im } u} = 0$ . Comme  $E = S \oplus \text{Im } u$ ,  $f = 0$  et la restriction de  $\Phi$  à  $\mathcal{F}$  est injective.

Montrons que  $\Phi(\mathcal{F}) = \text{Im } \Phi$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Notons  $\pi_1$  la projection de  $E$  sur  $\text{Im } u$  parallèlement à  $S$  et  $\pi_2$  la projection de  $E$  sur  $T$  parallèlement à  $\text{Ker } v$ . On vérifie que  $\pi_2 \circ f \circ \pi_1 \in \mathcal{F}$ . De plus,  $\pi_1 \circ u = u$  et  $v \circ \pi_2 = v$ . Donc  $v \circ (\pi_2 \circ f \circ \pi_1) \circ u = v \circ f \circ u$  i.e.  $\Phi(\pi_2 \circ f \circ \pi_1) = \Phi(f)$ .

Ainsi  $\Phi$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Im } \Phi$  et donc  $\text{rg } \Phi = \dim \mathcal{F}$ . Or  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(\text{Im } u, T)$ . De plus,  $v$  induit un isomorphisme de  $T$  sur  $\text{Im } v$  donc  $\dim T = \text{rg } v$ . Ainsi  $\text{rg } \Phi = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{L}(\text{Im } u, T) = \text{rg } u \text{ rg } v$ .

• **Solution 3**

Commençons par montrer le lemme suivant : si  $w \in \mathcal{L}(E)$  est de rang  $p$  alors il existe deux bases  $(e_i)$  et  $(\varepsilon_i)$  de  $E$  telles que

$$\text{mat}_{(e_i),(\varepsilon_i)}(w) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,n-p} \\ \mathbb{O}_{n-p,p} & \mathbb{O}_{p,p} \end{pmatrix}$$

où  $n$  est la dimension de  $E$ . En effet, soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } w$ . On se donne une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $S$  et une base  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $\text{Ker } w$ . Posons  $\varepsilon_i = w(e_i)$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Comme  $w$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } w$ ,  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  est une base de  $\text{Im } w$  qu'on complète en une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$ . La matrice de  $w$  dans ces bases est bien de la forme voulue.

Notons  $p = \text{rg } u$  et  $q = \text{rg } v$ . Notons  $(e_i), (\varepsilon_i)$  et  $(e'_i), (\varepsilon'_i)$  les bases définies dans le lemme correspondant respectivement à  $u$  et  $v$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $M = \text{mat}_{(\varepsilon_i),(\varepsilon'_i)}(f)$ . Alors  $\text{mat}_{(e_i),(\varepsilon'_i)}(v \circ f \circ u)$  est la sous-matrice de  $M$   $(m_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ . Ainsi  $\text{Im } \Phi$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et est donc de dimension  $pq = \text{rg } u \text{ rg } v$ .

**Solution 58**

- $f$  est linéaire essentiellement grâce à la  $\mathbb{R}$ -linéarité de la conjugaison. On a  $f(1) = 1$  et  $f(i) = -2 - i$ . La famille  $(f(1), f(i))$  est libre dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2  $\mathbb{C}$  : c'est donc une base.  $f$  transforme donc une base de  $\mathbb{C}$  en une base de  $\mathbb{C}$  : c'est un automorphisme de  $\mathbb{C}$ .
- On cherche donc  $e_1$  et  $e_2$  dans  $\mathbb{C}$  tels que

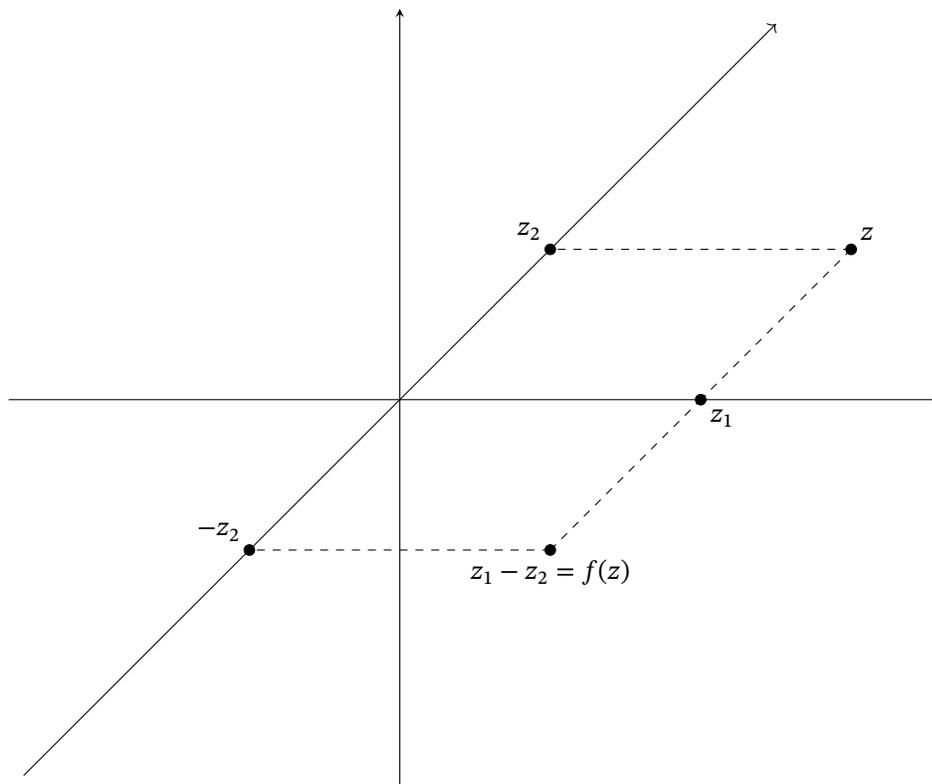
$$f(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -e_2$$

On a donc à résoudre :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} ie_1 + (1-i)\bar{e}_1 = e_1 \\ ie_2 + (1-i)\bar{e}_2 = -e_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} i(e_1 - \bar{e}_1) - (e_1 - \bar{e}_1) = 0 \\ i(e_2 - \bar{e}_2) + (e_2 + \bar{e}_2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2 \text{Im}(e_1) - 2i \text{Im}(e_1) = 0 \\ -2 \text{Im}(e_2) + 2 \text{Re}(e_2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \text{Im}(e_1) = 0 \\ \text{Re}(e_2) = \text{Im}(e_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $e_1 = 1$  (on l'avait en fait déjà trouvé à la première question) et  $e_2 = 1 + i$ . On vérifie que  $(e_1, e_2)$  est bien une base de  $\mathbb{C}$ .

- La question précédente montre que  $f$  est une symétrie par rapport à  $\text{vect}(e_1)$  parallèlement à  $\text{vect}(e_2)$ .



### Solution 59

- Il suffit de montrer que  $\mathcal{B}$  est libre. Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $a \sin + b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} = 0$ . On évalue cette identité en 0 et on trouve  $b + d = 0$ . On dérive puis on évalue en 0 et on trouve  $a + c = 0$ . On dérive deux fois puis on évalue en 0 et on trouve  $-b + d = 0$ . On dérive trois fois puis on évalue en 0 et on trouve  $-a + c = 0$ . On a alors nécessairement  $a = b = c = d = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice de  $F$  par définition de  $F$  : c'est une base de  $F$ .
- $D(\sin) = \cos \in F$ ,  $D(\cos) = -\sin \in F$ ,  $D(\operatorname{sh}) = \operatorname{ch} \in F$  et  $D(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh} \in F$ . Ainsi  $D(\mathcal{B}) \subset F$ . Comme  $\mathcal{B}$  engendre  $F$ , on a par linéarité de  $D$  :  $D(F) \subset F$ .

- D'après la question précédente  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Posons  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a donc  $M = \left( \begin{array}{c|c} J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array} \right)$ . Notons  $I_2$  la

matrice identité de  $M_2(\mathbb{R})$ .

On a  $J^2 = -I$  donc  $J^3 = -J$  et  $J^4 = I_2$ . On en déduit que  $J^n = I_2$  si  $n \equiv 0[4]$ ,  $J^n = J$  si  $n \equiv 1[4]$ ,  $J^n = -I_2$  si  $n \equiv 2[4]$ ,  $J^n = -J$  si  $n \equiv 3[4]$ .

On a également  $K^2 = I_2$ . On en déduit que  $K^n = I_2$  si  $n \equiv 0[2]$  et  $K^n = K$  si  $n \equiv 1[2]$ .

Un calcul par blocs donne  $M^n = \left( \begin{array}{c|c} J^n & 0_2 \\ \hline 0_2 & K^n \end{array} \right)$ . Donc  $M^n = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & 0_2 \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array} \right)$  si  $n \equiv 0[4]$ ,  $M^n = \left( \begin{array}{c|c} J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array} \right)$  si  $n \equiv 1[4]$ ,  $M^n =$

$\left( \begin{array}{c|c} -I_2 & 0_2 \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array} \right)$  si  $n \equiv 2[4]$  et  $M^n = \left( \begin{array}{c|c} -J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array} \right)$  si  $n \equiv 3[4]$ .

- La question précédente montre que  $M^4 = I_4$  où  $I_4$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . Ainsi  $M$  est inversible d'inverse  $M^{-1} = M^3$ . Par conséquent,  $d$  est inversible est la matrice de  $d^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M^{-1} = M^3 = \left( \begin{array}{c|c} -J & 0_2 \\ \hline 0_2 & K \end{array} \right)$ .

5. La matrice de  $d - \text{Id}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M - I_4$ . On voit facilement que  $\text{Im}(M - I_4) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ . De plus,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$

$\text{Ker}(M - I_4)$ . Or  $\dim \text{Ker}(M - I_4) = 1$  donc ce vecteur engendre  $\text{Ker}(M - I_4)$ . On en déduit que  $\text{Im}(d - \text{Id}) = \text{vect}(-\sin + \cos, -\sin - \cos, \text{ch} - \text{sh})$  et que  $\text{Ker}(d - \text{Id}) = \text{vect}(\text{ch} + \text{sh})$ . Remarquons que  $\text{ch} - \text{sh}$  est la fonction  $\frac{1}{\exp}$  et que  $\text{ch} + \text{sh}$  est la fonction  $\exp$ .

6. On a  $g \circ f = d^2 - \text{Id}$ . La matrice de  $g \circ f$  est donc  $M^2 - I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a clairement  $\text{Im } g \circ f = \text{vect}(\sin, \cos)$  et

$\text{Ker } g \circ f = \text{vect}(\text{ch}, \text{sh})$ .

## Matrices remarquables

### Solution 60

1. Un grand classique...

- Puisque  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  contient la matrice nulle,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ . Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T = A + \lambda B$$

Ainsi  $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On prouve de même que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Notons  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Établissons que la famille

$$(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq j \leq i \leq n}$$

est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice symétrique. On a

$$\begin{aligned} M &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^n m_{i,i} E_{i,i} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,i}}{2} 2E_{i,i} \end{aligned}$$

La famille est donc génératrice. En reprenant ces calculs, il est clair que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,i}}{2} 2\lambda_{i,i} = 0$$

équivalent à  $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = 0$  ie  $\lambda_{i,j} = 0$  pour tous  $1 \leq i \leq j \leq n$ . La famille est donc également libre : c'est une base de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  qui est donc de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

- On prouve de même que la famille

$$(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq j < i \leq n}$$

est une base de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . La dimension de cet espace vaut donc  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

2. Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On a alors, pour tous indices  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$M_{i,j} = M_{j,i} = -M_{i,j}$$

donc  $M_{i,j} = 0$ . Ainsi  $M = 0$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Posons

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}.$$

On a clairement  $M = S + A$ ,  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , d'où

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

**REMARQUE.** Puisque la somme des dimensions des deux sev étudiés vaut  $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , la seule égalité  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$  suffit pour établir le caractère direct de leur somme. Nous avons explicité ci-dessus les deux projections associées dans la mesure où elles sont à connaître par cœur et rendent parfois de bien grands services !

### Solution 61

1. Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a clairement

$$E = \text{vect}(A, B, C)$$

donc  $E$  est un sev de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Comme  $(A, B, C)$  est clairement libre, on a  $\dim(E) = 3$ . Comme

$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad C^2 = A, \quad AB = BA = 0,$$

$$AC = CA = C, \quad BC = CB = 0,$$

$E$  est stable par produit.

2. Soient  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$ . Posons

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- Si  $a \neq \pm c$  et  $b \neq 0$ , on a  $\text{rg}(M(a, b, c)) = 3$ .
- Si  $a = \pm c$ ,  $c \neq 0$  et  $b \neq 0$ , on a  $\text{rg}(M(a, b, c)) = 2$ .
- Si  $a = c = 0$  et  $b \neq 0$ , on a  $\text{rg}(M(a, b, c)) = 1$ .
- Si  $a = \pm c$ ,  $c \neq 0$  et  $b = 0$ , on a  $\text{rg}(M(a, b, c)) = 1$ .
- Si  $a = b = c = 0$ , on a  $\text{rg}(M(a, b, c)) = 0$ .

3. Dans le cas où  $M(a, b, c)$  est de rang trois, on a

$$M(a, b, c)^{-1} = \begin{pmatrix} a/(a^2 - c^2) & 0 & -c/(a^2 - c^2) \\ 0 & 1/b & 0 \\ -c/(a^2 - c^2) & 0 & a/(a^2 - c^2) \end{pmatrix}.$$

4. Après tout calcul...

• Une base de matrices inversibles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Une base de matrices de rang 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution 62

F est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donc

$$\dim(F) \in \{0, \dots, 4\}.$$

Comme  $F \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  on a aussi  $\dim(F) \neq 4$ . D'autre part les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à F et sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc  $\dim(F) \geq 3$  c'est à dire  $\dim(F) = 3$ . Enfin

$$(M_1, M_2, M_3)$$

est une famille libre de trois vecteurs dans F qui est un espace de dimension 3. C'est donc une base de F.

### Solution 63

1. Notons  $U = (1, \dots, 1)^T$ . Si  $M \in \mathcal{M}$ , alors

$$MU = M^T U = s(M)U$$

Réciproquement, s'il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que

$$MU = M^T U = \alpha U$$

c'est que  $M \in \mathcal{M}$  et que  $s(M) = \alpha$ .

Si  $(M, N) \in \mathcal{M}^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors

$$MU = M^T U = s(M)U \text{ et } NU = N^T U = s(N)U$$

Il s'ensuit que

$$(\lambda M + \mu N)U = (\lambda M + \mu N)^T U = (\lambda s(M) + \mu s(N))U$$

Par conséquent,

$$\lambda M + \mu N \in \mathcal{M} \text{ et } s(\lambda M + \mu N) = \lambda s(M) + \mu s(N)$$

On a aussi

$$MNU = s(M)s(N)U \text{ et } (MN)^T U = s(M)s(N)U$$

Ainsi  $MN \in \mathcal{M}$  et  $s(MN) = s(M)s(N)$ .

On a donc bien prouvé que  $\mathcal{M}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et que  $s$  est un morphisme d'algèbres.

2. Soit  $M \in \mathcal{M}$  inversible. Remarquons tout d'abord que  $s(M) \neq 0$  sinon  $U$  serait un vecteur non nul du noyau de  $M$ . On multiplie à gauche par  $M^{-1}$  l'identité  $MU = s(M)U$  et on obtient  $M^{-1}U = \frac{1}{s(M)}U$ . De même, en multipliant à gauche par  $(M^T)^{-1}$  l'identité

$$M^T U = s(M)U, \text{ on obtient } (M^T)^{-1}U = \frac{1}{s(M)}U. \text{ Ceci prouve que } M^{-1} \in \mathcal{M} \text{ et que } s(M^{-1}) = \frac{1}{s(M)}.$$

3. Soit  $M \in \mathcal{M}$ . On a  $M = P + Q$  avec  $P = \frac{M + M^T}{2}$  symétrique et  $Q = \frac{M - M^T}{2}$  antisymétrique. On a aussi

$$PU = P^T U = s(M)U \text{ et } QU = Q^T U = 0.$$

Donc  $P$  et  $Q$  sont magiques. On sait enfin que les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques sont en somme directe donc a fortiori  $\mathcal{M}_s$  et  $\mathcal{M}_a$ . On a donc bien  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \oplus \mathcal{M}_a$ .

4. Soit  $M \in \mathcal{M}$ . Comme on a  $MU = s(M)U$ ,  $\mathcal{K} = \text{vect}((1, \dots, 1))$  est stable par  $\phi_M$ . De plus,  $\mathcal{H} = \text{Ker } \psi$  où  $\psi$  est la forme linéaire canoniquement associée au vecteur ligne  $U^T$ . Comme  $U^T M = s(M)U^T$ , on a donc  $\psi \circ \phi_M = s(M)\psi$  de sorte que le noyau  $\mathcal{H}$  de  $\psi$  est stable par  $\phi_M$ .

Réciproquement, on suppose que  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont stables par  $\phi_M$ . Comme  $\mathcal{K} = \text{vect}((1, \dots, 1))$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $MU = \alpha U$ . Comme  $\mathcal{H} = \text{Ker } \psi$  est stable par  $\phi_M$ , on a  $\text{Ker } \psi \circ \phi_M \subset \text{Ker } \psi$  et donc il existe  $\beta \in \mathbb{K}$  tel que  $\psi \circ \phi_M = \beta \psi$  de sorte que  $M^T U = \beta U$ . Mais alors

$$\text{tr}(MUU^T) = \alpha \text{tr}(UU^T) = n\alpha$$

et

$$\text{tr}(M^T UU^T) = \beta \text{tr}(UU^T) = n\beta.$$

De plus,

$$\text{tr}(MUU^T) = \text{tr}(UU^T M) = \text{tr}(M^T UU^T).$$

Donc  $n\alpha = n\beta$  et  $\alpha = \beta$ . Ainsi  $M \in \mathcal{M}$ .

5. L'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{K}) \\ M &\longmapsto (\phi_{M|_{\mathcal{H}}}, \phi_{M|_{\mathcal{K}}}) \end{aligned}$$

est bien définie puisque  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont stables par  $\phi_M$  pour  $M \in \mathcal{M}$ . Si on se donne 2 endomorphismes de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{K}$ , on définit bien un unique endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  puisque  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}^n$ . La matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est un élément de  $\mathcal{M}$  d'après la question précédente.  $\Phi$  est donc un isomorphisme et  $\dim \mathcal{M} = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$ .

## Solution 64

1. Le fait que  $\Delta_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  provient de la linéarité de la transposition et de la linéarité de la trace. Soit  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . On a alors  $M + M^T = 0$ . De plus, les éléments diagonaux de  $M$  sont nuls donc  $\text{tr}(M) = 0$ . Ainsi  $M + M^T = \text{tr}(M)A = 0$  donc  $M \in \Delta_A$ . D'où  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \subset \Delta_A$ .
2. Soit  $M \in \Delta_A$ . On a donc  $\text{tr}(M + M^T) = \text{tr}(\text{tr}(M)A)$ . Par linéarité de la trace, ceci équivaut à  $\text{tr}(M) + \text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)\text{tr}(A)$ . Or  $\text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)$  donc  $2\text{tr}(M) = \text{tr}(A)\text{tr}(M)$ . Puisque  $\text{tr}(A) \neq 2$ ,  $\text{tr}(M) = 0$  et finalement  $M + M^T = 0$  i.e.  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . Ainsi  $\Delta_A \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . L'inclusion réciproque ayant été prouvé à la première question,  $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .
3. Soit  $M \in \Delta_A$ . Remarquons que  $(M + M^T)^T = M + M^T$  donc  $\text{tr}(M)A^T = \text{tr}(M)A$ . Comme  $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ ,  $A^T \neq A$  donc  $\text{tr}(M) = 0$ . On a alors  $M + M^T = 0$  et donc  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ . On a donc à nouveau  $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

4. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ , il existe  $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  et  $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M = P + Q$ . On a déjà vu que  $Q \in \Delta_A$  donc  $M \in \Delta_A$  si et seulement si  $P \in \Delta_A$ . Autrement dit, il suffit de déterminer  $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  et on aura  $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus (\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}))$  (la somme est directe car  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  sont en somme directe).

Soit  $M \in \Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ . Comme  $M^T = M$  on a donc  $2M = \text{tr}(M)A$  et donc  $M \in \text{vect}(A)$ . Réciproquement soit  $M \in \text{vect}(A)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $M = \lambda A$ . Alors  $M + M^T = 2\lambda A$  car  $A^T = A$  par hypothèse. D'autre part,  $\text{tr}(M) = \lambda \text{tr}(A) = 2\lambda$ . On a donc bien  $M + M^T = \text{tr}(M)A$  et  $M \in \Delta_A$ . Ainsi  $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) = \text{vect}(A)$ .

On a donc  $\Delta_A = \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \oplus \text{vect}(A)$ .

### Solution 65

1. a. L'application  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \text{tr}(M) \end{cases}$  est une forme linéaire non nulle. Comme  $\mathcal{N}_n = \text{Ker } \varphi$ ,  $\mathcal{N}_n$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de dimension  $n^2 - 1$ .
- b. Soit  $M \in \mathcal{L}_n$ . Il existe donc  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  tel que  $M = [A, B]$ . Alors  $\text{tr}(M) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$  et donc  $M \in \mathcal{N}_n$ . On a donc  $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$ .
2. a. Soient  $D$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de diagonale nulle et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  semblable à  $D$ . Il existe donc  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $M = P^{-1}DP$ . Alors

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(P^{-1}DP) = \text{tr}(PP^{-1}D) = \text{tr}(D) = 0$$

et  $M \in \mathcal{N}_n$ .

- b. On raisonne par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , il n'y a rien à faire puisque la seule matrice de  $\mathcal{N}_1$  est la matrice nulle.

Supposons le résultat établi pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $M \in \mathcal{N}_{n+1}$ . On montre d'abord que  $M$  est semblable à une matrice dont le coefficient sur la première ligne et la première colonne est nul. Pour cela, notons  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^{n+1}$  canoniquement associé à  $M$ . Si  $f$  est une homothétie, alors son rapport est nécessairement nul puisque  $\text{tr}(M) = 0$ . Ainsi  $M = 0$  et il n'y a rien à faire. Sinon on montre classiquement qu'il existe  $x \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que la famille  $(x, f(x))$  soit libre. On complète cette famille en une base de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . On note  $M'$  la matrice de  $f$  dans cette base. Alors  $M$  et  $M'$  sont bien semblables et  $M'$  est bien

de la forme voulue. On a donc  $M' = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ & & M'' & \end{array} \right)$ . Puisque  $M$  et  $M'$  sont semblables,  $\text{tr}(M) = \text{tr}(M') = 0$ . On en déduit

$\text{tr}(M'') = 0$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $M''$ . Il existe donc  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $D = P^{-1}M''P$  soit une

matrice de diagonale nulle. Posons alors  $P' = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P & \end{array} \right)$ . On a  $P'^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P^{-1} & \end{array} \right)$  et un calcul par blocs montre

que  $P'^{-1}M'P' = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ & & D & \end{array} \right)$ . Ainsi  $M'$  est semblable à une matrice de diagonale nulle. Par transitivité de la relation de

similitude,  $M$  l'est également.

- c. Soit  $M \in \mathcal{N}_n$ . D'après la question précédente, il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de diagonale nulle semblable à  $M$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  des scalaires distincts deux à deux. On note  $D$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Enfin, on définit une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en posant  $B_{ij} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On vérifie que  $A = DB - BD$ . Comme  $M$  est

semblable à  $A$ , il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $M = P^{-1}AP$  ou encore

$$M = (P^{-1}DP)(P^{-1}BP) - (P^{-1}BP)(P^{-1}DP)$$

Ainsi  $M \in \mathcal{L}_n$ .

### Solution 66

Notons  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des matrices symplectiques de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ . On a clairement  $I_{2n} \in \mathcal{S}_n$ .  
On vérifie que  $J^T = -J$  et un calcul par blocs montre que  $J^2 = -I_{2n}$ .  
Soient  $M, N \in \mathcal{S}_n$ . Alors

$$(MN)^T J (MN) = N^T (M^T J M) N = N^T J N = J$$

donc  $MN \in \mathcal{S}_n$ .

Soit  $M \in \mathcal{S}_n$ . On a alors

$$(J M^T J) M = J (M^T J M) = J^2 = -I_{2n}$$

Ceci prouve que  $M$  est inversible d'inverse  $M^{-1} = -J M^T J$ . On vérifie que  $M^{-1} \in \mathcal{S}_n$ . En effet :

$$(M^T)^{-1} J M^{-1} = (-J^T M J^T) J M^{-1} = J M (-J^2) M^{-1} = J M M^{-1} = J$$

### Solution 67

Notons  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On rappelle que pour tout  $(i, j, k, l) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ ,  $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Alors  $E_{ii} - E_{jj} = E_{ij} E_{ji} - E_{ji} E_{ij}$  et donc  $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$ . On en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(E_{ii}) = \lambda$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Soit à nouveau  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Alors  $E_{ij} = E_{i1} E_{1j} - E_{1j} E_{i1}$ . On en déduit que  $f(E_{ij}) = 0$ .

Finalement,

- $f(E_{ii}) = \lambda = \lambda \operatorname{tr}(E_{ii})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ;
- $f(E_{ij}) = 0 = \lambda \operatorname{tr}(E_{ij})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ .

Les formes linéaires  $f$  et  $\lambda \operatorname{tr}$  coïncident sur la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : elles sont donc égales.

## Equations d'inconnue matricielle

### Solution 68

Soient  $1 \leq i, j \leq n$ . Pour  $X = E_{i,j}$ , on obtient

$$\operatorname{tr}(AX) = a_{j,i} = \operatorname{tr}(BX) = b_{j,i}.$$

Ainsi  $A = B$ .

### Solution 69

1. On a clairement  $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Donc  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\operatorname{Im} A$ . On vérifie que  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ . Or d'après le théorème du rang  $\dim \operatorname{Ker} A = 1$  donc  $\operatorname{Ker} A = \operatorname{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\operatorname{Ker} A$ .
2. Le noyau de  $A$  est non nul donc  $A$  n'est pas inversible. On peut aussi dire que  $\operatorname{rg}(A) = 1 \neq 2$ .
3. On a  $X(X + I_2) = A$ . Or un produit de matrices est inversible.  $A$  n'étant pas inversible, on a  $X$  ou  $X + I_2$  non inversible.
4.
  - a. On a  $A = X(X + I_2)$  donc  $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} X$  et  $A = (X + I_2)X$  donc  $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Ker} A$ .
  - b. Comme  $X$  n'est pas inversible,  $\operatorname{Ker} X \neq \{0\}$  et  $\dim \operatorname{Ker} X \geq 1$ . Or  $\dim \operatorname{Ker} A = 1$  donc d'après la question précédente  $\dim \operatorname{Ker} X = 1$  et  $\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} A$ .  
Par le théorème du rang,  $\operatorname{rg} X = 1$ . Et on sait que  $\operatorname{rg} A = 1$ . Donc d'après la question précédente,  $\operatorname{Im} X = \operatorname{Im} A$ .
  - c. On a  $\operatorname{Im} X = \operatorname{Im} A = \operatorname{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  donc il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ . Or  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} X$  donc  $x = y$ . Il existe donc  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $X = xA$ . Or la matrice nulle n'est pas solution de l'équation de l'énoncé donc  $x \neq 0$ . Comme  $A^2 = 2A$ , en reportant dans l'équation, on obtient  $2x^2 + x = 1$  donc  $x = -1$  ou  $x = \frac{1}{2}$ . Ainsi  $X = -A$  ou  $X = \frac{1}{2}A$ .



Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + z = b + 2a \\ 0 = a + b + c \end{cases}$$

qui admet une solution si et seulement si  $a + b + c = 0$ . Géométriquement cela signifie qu'un point de  $\mathbb{R}^3$  est une image par l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -2x - 3y + 3z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$$

si et seulement si il est dans le plan d'équation  $x + y + z = 0$ .

Dans ce cas le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + z = a - c \end{cases}$$

qu'on résout en remontant du bas vers le haut. On trouve

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c - a + 3z \\ a - c - z \\ z \end{pmatrix} \quad \text{où } z \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'ensemble de solutions est une droite  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , à savoir

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2c - a \\ a - c \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution 73

#### 1. Pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -4 & \\ 3 & 2 & -3 & 17 & \\ 5 & -3 & 8 & -10 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ |2 \leftarrow + \\ |2 \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -5 \\ \\ + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -4 & \\ 0 & 7 & -18 & 46 & \\ 0 & -1 & -4 & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{+} \\ |7 \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -4 & \\ 0 & 7 & -18 & 46 & \\ 0 & 0 & -46 & 46 & \end{array} \right)$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 7y - 18z = 46 \\ -46z = 46 \end{cases}$$

qu'on résout facilement en commençant par le bas. On trouve l'unique solution  $(2, 4, -1)$ .

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -11 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \phantom{02} \\ \phantom{02} \end{array} \right\}^{-3} \\ \leftarrow_{+} \\ \phantom{02} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \phantom{02} \right\}^{-1} \\ \leftarrow_{+} \\ \phantom{02} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent à un système dont une équation est  $0x + 0y + 0z = -1$ , ou encore  $0 = -1$ . Il n'y a pas de  $(x, y, z)$  vérifiant cette équation. Par conséquent le système n'a pas de solution.

**REMARQUE.** On aurait déjà pu le voir une étape plus tôt, car elle contient les équations contradictoires  $5y - 9 = -1$  et  $5y - 9 = -2$ .

3. On commence par une permutation de lignes pour obtenir un pivot en haut à gauche.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \phantom{02} \right\} \\ \leftarrow \\ \phantom{02} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \phantom{02} \right\}^{-2} \\ \leftarrow_{+} \\ \phantom{02} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \phantom{02} \right\}^{-3} \\ \leftarrow_{+} \\ \phantom{02} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y - z = -2 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation est vérifiée pour tout choix de  $(x, y, z)$ . Elle est donc superflue et peut être omise. En résout les deux équations restantes.

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 2 - y - (2 + 2y) = -3y \\ z = 2 + 2y. \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions, à savoir tous les triplets  $(-3y, y, 2 + 2y)$  avec  $y \in \mathbb{R}$ . L'ensemble de solutions s'écrit aussi comme

$$\{(0, 0, 2) + y(-3, 1, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

ou encore,

$$(0, 0, 2) + \mathbb{R}(-3, 1, 2).$$

Il s'agit de la droite passant par le point  $(0, 0, 2)$  est dirigée par le vecteur  $(-3, 1, 2)$ .

4. On commence par une permutation de lignes puisque le pivot le plus simple à manipuler est 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -2 \end{array} \right] -2 \\ \left[ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \leftarrow + \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -5 & 22 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow -1 \end{array} \right] -5 \\ \left[ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -68 & 31 \end{pmatrix}$$

La troisième équation donne  $z = -5/9$  tandis que la quatrième donne  $z = -68/31 \neq -5/9$ . Par conséquent le système n'a pas de solution.

#### Solution 74

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)y + (1-m^2)z = 1-m^3 & L_1 \leftarrow L_1 - mL_3 \\ (m-1)y + (1-m)z = m-m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-m-m^2)z = (1+m-m^2-m^3) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m-m^2 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Les racines de  $m^2 + m - 2$  sont 1 et  $-2$ . On distingue donc trois cas.

- Si  $m = 1$ , alors le système équivaut à  $x + y + z = 1$ . L'ensemble des solutions est donc

$$\{(1 - y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si  $m = -2$ , alors le système n'a clairement pas de solution.
- Si  $m \neq 1$  et  $m \neq -2$ , alors on trouve successivement

$$z = \frac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + m - 2} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

$$y = \frac{m - m^2}{m-1} + z = \frac{1}{m+2}$$

$$x = m^2 - y - mz = -\frac{m+1}{m+2}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton

$$\left\{ \left( -\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2} \right) \right\}$$