

POLYNÔMES

Divisibilité et division

Solution 1

1. Soit $n \geq \deg(P)$. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre n pour P ,

$$P = P(a) + (X - a) \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-1},$$

en convenant que la somme est nulle si $n \leq 0$. Par unicité dans la division euclidienne de P par $X - a$, le reste recherché vaut $P(a)$.

2. Soit $n > \deg(P)$. Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre n pour P ,

$$P = P(a) + P'(a)(X - a) + (X - a)^2 \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-2},$$

en convenant que la somme est nulle si $n \leq 1$. Par unicité dans la division euclidienne de P par $(X - a)^2$, le reste recherché vaut

$$P(a) + P'(a)(X - a).$$

3. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $R = uX + v$. Puisque

$$P = (X - a)(X - b)Q + uX + v,$$

on obtient après évaluation en a et b ,

$$P(a) = ua + v, \quad P(b) = ub + v,$$

d'où

$$u = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad v = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}.$$

Solution 2

On remarque que

$$(X - 1)B = X^4 - 1,$$

les racines de B sont donc les racines quatrièmes de l'unité *sauf* 1, ie

$$-1, \pm i.$$

Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B . Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$R = aX^2 + bX + c.$$

Puisque

$$P = BQ + R,$$

on obtient après évaluation en -1 et $\pm i$,

$$\begin{cases} a - b + c = A(-1) = -2 \\ -a + ib + c = A(i) = i - 1 \\ -a - ib + c = A(-i) = -i - 1 \end{cases}$$

On a donc

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1.$$

Ainsi

$$R = X - 1.$$

Solution 3

- Un polynôme P est divisible par $(X - 1)^2$ si et seulement si 1 est une racine *au moins double* de P , ie

$$P(1) = P'(1) = 0.$$

Le polynôme de l'énoncé est donc divisible par le polynôme $(X - 1)^2$ si et seulement si

$$a + b + 1 = 0 \text{ et } (n + 1)a + nb = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = n \text{ et } b = -n - 1.$$

- Prouvons que le quotient de P par $(X - 1)^2$ vaut

$$Q = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}.$$

Posons

$$V = 1 + X + \dots + X^n,$$

de sorte que $V' = Q$. On a

$$(X - 1)V = X^{n+1} - 1,$$

donc

$$(X - 1)^2V = X^{n+2} - X^{n+1} - X + 1,$$

d'où, après dérivation formelle,

$$(X - 1)^2V' + 2(X - 1)V = (n + 2)X^{n+1} - (n + 1)X^n - 1,$$

ainsi,

$$(X - 1)^2Q = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1.$$

REMARQUE. Mais non, cher lecteur ! La formule du quotient Q ne tombe pas du ciel... En posant au brouillon la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$, on aboutit rapidement à cette conjecture. Une démonstration par récurrence est possible, tout comme l'utilisation de la formule de Taylor est également envisageable. La solution retenue ci-dessus est plus astucieuse que ces deux méthodes.

Solution 4

- Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour P_n en 3,

$$P_n = P_n(3) + (X - 3) \sum_{k=1}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(3)}{k!} (X - 3)^{k-1}$$

Par unicité dans la division euclidienne de P_n par $X - 3$, le reste recherché vaut

$$P_n(3) = -1.$$

- Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre $2n$ pour P_n en 2,

$$P_n = P_n(2) + P_n'(2)(X - 2) + (X - 2)^2 \sum_{k=2}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(2)}{k!} (X - 2)^{k-2}.$$

Par unicité dans la division euclidienne de P par $(X - 2)^2$, le reste recherché vaut

$$P_n(2) + P_n'(2)(X - 2),$$

c'est-à-dire,

$$-2n(X - 2) - 1.$$

3. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par $(X-2)^2(X-3)^2$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$R = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Puisque

$$P = BQ + R,$$

On a

$$P^{(k)}(u) = R^{(k)}(u)$$

pour $k \in \{0, 1\}$ et $u \in \{2, 3\}$, d'où le système suivant,

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = -1 \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 \\ 12a + 4b + c = -2n \\ 27a + 6b + c = n \end{cases}$$

Ainsi, après un banal pivot de Gauss, on trouve finalement

$$a = -n, \quad b = 9n, \quad c = -26n, \quad d = 24n - 1.$$

Solution 5

1. En reprenant pas à pas la démonstration de l'algorithme de la division euclidienne sur \mathbb{C} de deux polynômes réels, on s'aperçoit que les coefficients du quotient et du reste appartiennent à \mathbb{R} car se calculent au moyen de sommes et de multiplications à partir des coefficients des deux polynômes.

2. Puisque les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , on déduit de la question précédente que

$$P_n = X^{2n} + X^n + 1$$

est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si

$$P_n(j) = P_n(j^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$1 + j^n + j^{2n} = 0$$

et

$$1 + j^{2n} + j^{4n} = 0.$$

- *Cas 1* : $n \equiv 0[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m$ et

$$j^n = j^{2n} = j^{4n} = 1,$$

donc n n'est pas solution.

- *Cas 2* : $n \equiv 1[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m + 1$ et

$$j^n = j^{4n} = j, \quad j^{2n} = j^2,$$

donc n est solution puisque

$$1 + j + j^2 = 0.$$

- *Cas 3* : $n \equiv 2[3]$. L'entier n est donc de la forme $n = 3m + 2$ et

$$j^n = j^{4n} = j^2, \quad j^{2n} = j,$$

donc n est solution puisque

$$1 + j + j^2 = 0.$$

3. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 . On déduit de la question 1. que

$$Q_n = (X^4 + 1)^n - X^4$$

est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si

$$Q_n(j) = Q_n(j^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1 + j^4)^n - j^4 = (1 + j^8)^n - j^8 = 0.$$

Puisque $j^4 = j$, $j^8 = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$, les conditions sont équivalentes à ,

$$(-1)^n j^{2n} = j \text{ et } (-1)^n j^n = j^2.$$

- Regroupons les différents cas dans un tableau.

	$(-1)^n j^n$	$(-1)^n j^{2n}$
$n \equiv 0[6]$	1	1
$n \equiv 1[6]$	$-j$	$-j^2$
$n \equiv 2[6]$	j^2	j
$n \equiv 3[6]$	-1	-1
$n \equiv 4[6]$	j	j^2
$n \equiv 5[6]$	$-j^2$	$-j$

- L'ensemble recherché est donc

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 2[6]\}.$$

Solution 6

écrivons la division euclidienne de

$$P = (\cos \theta + X \sin \theta)^n$$

par $X^2 + 1$: comme le degré du diviseur est égal à 2, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$P = (X^2 + 1)Q + \alpha X + \beta.$$

Débarraçons-nous du quotient en substituant i à l'indéterminée. On en déduit que $P(i) = \beta + i\alpha$ et (formules de Moivre-Euler) donc :

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \beta + i\alpha.$$

Comme α et β sont réels (il ne peut pas nuire d'insister sur ce point), on en déduit que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ est égal à

$$(\sin n\theta)X + \cos n\theta.$$

Solution 7

On vérifie que $P_n(1) = P'_n(1) = 0$ et $P''_n(1) = n(n+1)$. D'après la formule de Taylor,

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2}(X-1)^2 + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k,$$

donc le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^3$ est égal à

$$\frac{n(n+1)}{2}(X-1)^2.$$

Solution 8

Par hypothèse, il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que

$$P = (X+1)Q_1 + 7 = (X+5)Q_2 + 3.$$

On en déduit que $P(-1) = 7$ et $P(-5) = 3$ (en substituant -1 et -5 à l'indéterminée X).
écrivons maintenant la division euclidienne de P par

$$X^2 + 6X + 5 = (X+1)(X+5).$$

Il existe deux réels α et β tels que

$$P = (X+1)(X+5)Q + \alpha X + \beta.$$

Substituons à nouveau -1 et -5 à X : on en déduit le système

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ -5\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$(\alpha, \beta) = (1, 8).$$

Le reste de la division euclidienne est donc $X + 8$.

Solution 9

Notons Q_n et R_n respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de P_n par $X^2 + 1$. Comme $\deg(X^2 + 1) = 2$, R_n est de degré au plus 1 et il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$P_n = (X^2 + 1)Q_n + a_n X + b_n.$$

En évaluant cette égalité en i , on aboutit à :

$$b_n + ia_n = P_n(i).$$

Or,

$$\begin{aligned} P_n(i) &= \prod_{k=1}^n \left(i \sin(k\pi/n) + \cos(k\pi/n) \right) \\ &= \prod_{k=1}^n e^{ik\pi/n} = e^{i\pi(1+\dots+n)/n} \\ &= e^{i(n+1)\pi} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

D'où $a_n = 0$ et $b_n = (-1)^{n+1}$ et

$$R_n = (-1)^{n+1}.$$

Solution 10

Les racines de Q sont j et j^2 . Ce sont des racines simples et conjuguées. Pour prouver que Q divise P_m , il est nécessaire et suffisant de prouver que j et j^2 sont des racines d'ordre au moins 1 de P_m . Comme P_m est un polynôme à coefficients réels, ses racines sont conjuguées donc si j est une racine de P_m , j^2 en est aussi une. Donc Q divise P_m si et seulement si j est une racine de P_m .

On a $P_m(j) = (j+1)^m - j^m - 1$ mais on sait que $j^2 + j + 1 = 0$ donc $P_m(j) = (-j^2)^m - j^m - 1$. En utilisant le fait que

$$j^2 + j + 1 = 0 \quad \text{et} \quad j^3 = 1,$$

un rapide calcul nous donne :

$$\begin{array}{lll} P_0(j) = -3 & P_1(j) = 0 & P_2(j) = 2j \\ P_3(j) = -3 & P_4(j) = 2j^2 & P_5(j) = 0 \end{array}$$

Si on poursuit le calcul pour des plus grandes valeurs de m , on constate que l'on retombe sur les mêmes valeurs. Prouvons que la suite $(P_m(j))_{m \in \mathbb{N}}$ est périodique de période 6. En effet,

$$\begin{aligned} P_{m+6}(j) &= (-j^2)^{m+6} - j^{m+6} - 1 \\ &= (-j^2)^m j^{12} - j^m j^6 - 1 \\ &= (-j^2)^m - j^m - 1 = P_m(j) \end{aligned}$$

Les seuls entiers m tels que $P_m(j) = 0$ sont les entiers de la forme $1 + 6k$ ou $5 + 6k$, où $k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, ce sont les seuls entiers tels que Q divise P_m .

Solution 11

1. On sait que j est une racine de $X^2 + X + 1$. On en déduit que $j + 1 = -j^2$. De plus, $2009 \equiv 2[3]$ (2007 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres vaut 9). Or on sait également que $j^3 = 1$. Donc

$$j^{2009} = j^2 \quad \text{et} \quad (j+1)^{2009} = (-1)^{2009} j^4 = -j.$$

Posons $P = (X+1)^{2009} + X^{2009} + 1$. On a

$$P(j) = j^2 - j + 1 = -2j \neq 0.$$

Par conséquent, j n'est pas une racine de P et $X^2 + X + 1$ ne divise pas P .

2. D'après la question précédente, la valeur j^n dépend de la congruence de n modulo 3 et $(j+1)^n$ dépend des congruences de n modulo 2 et modulo 3. Si on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$, $P_n(j)$ devrait dépendre de la congruence de n modulo 6. On a :

$$P_n(j) = (-1)^n j^{2n} + j^n + 1$$

- Si $n \equiv 0[6]$, alors $P_n(j) = 3 \neq 0$.
- Si $n \equiv 1[6]$, alors $P_n(j) = -j^2 + j + 1 = -2j^2 \neq 0$.
- Si $n \equiv 2[6]$, alors $P_n(j) = j + j^2 + 1 = 0$.
- Si $n \equiv 3[6]$, alors $P_n(j) = 1 \neq 0$.
- Si $n \equiv 4[6]$, alors $P_n(j) = j^2 + j + 1 = 0$.
- Si $n \equiv 5[6]$, alors $P_n(j) = -j + j^2 + 1 = -2j$.

Comme P_n est à coefficients réels, j^2 est une racine de P_n si et seulement si j est une racine de P_n . Donc j et j^2 sont des racines de P_n si et seulement si $n \equiv 2[6]$ ou $n \equiv 4[6]$. Par conséquent, $X^2 + X + 1$ divise P_n pour ces valeurs de n .

Solution 12

1. Evident.
2. Remarquons que $F = \mathbb{A}\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit sans peine que (A, AX, AX^2) est une base de F .

3. On a donc $\dim F = 3$. De plus, $\dim E = 5$ et $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$ donc $\dim E = \dim F + \dim \mathbb{R}_1[X]$. Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$. Comme $P \in F$, il existe donc $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = AQ$. Ainsi $\deg P = 2 + \deg Q$. De plus, $P \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\deg P \leq 1$. On en déduit que $\deg Q < 0$ i.e. $Q = 0$ puis $P = 0$. Ainsi $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$. On peut alors en déduire que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

Solution 13

1. D est bien une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe des polynômes $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\begin{aligned} P_1 &= AQ_1 + R_1 && \text{et } \deg R_1 < d \\ P_2 &= AQ_2 + R_2 && \text{et } \deg R_2 < d \end{aligned}$$

Ceci signifie que $D(P_1) = R_1$ et $D(P_2) = R_2$. On a alors $\lambda P_1 + \mu P_2 = A(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2$ et $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leq \max(\deg(\lambda R_1), \deg(\mu R_2)) < d$. Ainsi $\lambda R_1 + \mu R_2$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par A . Autrement dit, $D(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda D(P_1) + \mu D(P_2)$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $R = D(P)$. On a donc $\deg R < \deg A$. Puisque $R = 0 \times A + R$, on en déduit $D(R) = R$. Autrement dit $D^2(P) = D(P)$. Ceci étant valable pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a donc $D^2 = D$ et D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.
3. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg D(P) < d$ i.e. $\deg D(P) \leq d - 1$. Ainsi $\text{Im } D \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$. De plus, on a vu que si $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, alors $R = D(R) \in \text{Im } D$. Ainsi $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \text{Im } D$. D'où $\text{Im } D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
4. Un polynôme P appartient au noyau de D si et seulement si A divise P . Autrement dit, $\text{Ker } D = A\mathbb{K}[X]$. Puisque A est un projecteur,

$$\mathbb{K}[X] = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A = A\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

Solution 14

Notons $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m . Remarquons que $X^m \equiv 1[X^m - 1]$ et donc $X^{mq} \equiv 1[X^m - 1]$ puis $X^n - 1 \equiv X^r - 1[X^m - 1]$. Puisque $\deg X^r - 1 = r < m = \deg(X^m - 1)$, $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$. Ainsi

$$m \mid n \iff r = 0 \iff X^r - 1 = 0 \iff X^m - 1 \mid X^n - 1$$

Solution 15

Raisonnons par l'absurde en supposant P_n réductible sur \mathbb{Q} . Il existe alors deux polynômes U et V non constants de $\mathbb{Q}[X]$. Notons a le pgcd des dénominateurs des coefficients rationnels (réduits) des polynômes U et V .

- *Commençons par établir que l'on peut toujours supposer U et V à coefficients dans \mathbb{Z} .* On a alors

$$a^2 P_n = (aU)(aV).$$

Posons $U_1 = aU$ et $V_1 = aV$. Ces polynômes sont à coefficients dans \mathbb{Z} . Notons $\gamma(P)$ le contenu d'un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$. On a

$$\gamma(a^2 P_n) = a^2 \gamma(P_n) = \gamma(U_1) \gamma(V_1).$$

On a

$$U_1 = \gamma(U_1)U_2, \quad V_1 = \gamma(V_1)V_2,$$

d'où

$$a^2 P_n = \gamma(U_1) \gamma(V_1) U_2 V_2,$$

et donc

$$a^2 P_n = a^2 \gamma(P_n) U_2 V_2,$$

puis

$$P_n = \gamma(P_n) U_2 V_2,$$

avec U_2 et V_2 non constants : P_n est donc le produit de deux polynômes non constants à coefficients dans \mathbb{Z} .

- Notons

$$U = \sum_{k \geq 0} \alpha_k X^k, \quad V = \sum_{k \geq 0} \beta_k X^k.$$

Par le morphisme d'anneaux de réduction modulo p (de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{F}_p[X]$), on obtient l'égalité

$$\bar{P} = \bar{U}\bar{V}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \bar{a}_k = \sum_{\ell=0}^k \bar{\alpha}_\ell \bar{\beta}_{k-\ell}.$$

On a en particulier

$$\bar{a}_0 = \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_0 = 0$$

car p divise a_0 . Ainsi, on a par exemple $\alpha_0 = 0$. Mais alors $\beta_0 \neq 0$ car p^2 ne divise pas a_0 . Comme

$$0 = \bar{a}_1 = \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_0 = \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_0$$

d'où $\bar{\alpha}_1 = 0$. Par une récurrence facile, on prouve que

$$\forall k, \quad \bar{\alpha}_k = 0$$

ce qui est absurde car alors $\bar{U} = 0$ mais $\bar{P} \neq 0$ puisque $\bar{a}_n \neq 0$.

Factorisations

Solution 16

1. Recherchons les racines complexes de P_n . Soit z une racine de P_n telle que $z^2 \neq 1$. On a alors

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (z^2)^k = \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2}.$$

Les racines de P_n sont donc les racines $2n$ -ièmes de l'unité sauf ± 1 . Puisque P_n est unitaire, on en déduit la décomposition sur \mathbb{C} de P_n ,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\frac{\pi}{2n}}) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - e^{2ik\frac{\pi}{2n}})$$

car $e^{i0} = 1$ et $e^{2in\pi/2n} = -1$ sont à exclure ! Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i(2n-k)\frac{\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{-ik\frac{\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{ik\frac{\pi}{n}})(X - e^{-ik\frac{\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\cos(k\pi/n)X + 1) \end{aligned}$$

2. Calculons $P_n(1)$. On a

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n-1} 2(1 - \cos(k\pi/n)) = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2(k\pi/2n)$$

Or $P_n(1) = n$, donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/2n) \right)^2 (2^{n-1})^2 = n.$$

On remarque alors que $\forall 1 \leq k \leq n-1$,

$$\sin(k\pi/2n) > 0,$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/2n) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

3. Calculons $P_n(i)$. On a clairement

$$\begin{aligned} P_n(i) &= \prod_{k=1}^{n-1} (-2i \cos(k\pi/n)) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n) \end{aligned}$$

Or,

$$P_n(i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = (1 - (-1)^n)/2,$$

d'où la discussion suivante...

- Cas 1 : $n \in 2\mathbb{N}$. On a

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n) = 0,$$

ce qui n'est pas surprenant puisque que lorsque $k = n/2 \in \mathbb{N}$, on a $\cos(k\pi/n) = 0!$

- Cas 2 : $n \in 2\mathbb{N} + 1$. On a

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}.$$

Solution 17

1. En utilisant les racines cubiques de -1 : $-1, -j, -j^2$ ou la factorisation de $a^n + b^n$ lorsque n est impair, on trouve

$$A = (X + 1)(X^2 - X + 1).$$

2. Variant les plaisirs en appliquant les identités remarquables,

$$B = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur \mathbb{R} .

3. Bis repetita !

$$C = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur \mathbb{R} .

4. En utilisant la factorisation de $a^n + b^n$ lorsque n est impair, on trouve

$$D = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$$

Or,

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - 3X^2 \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

Les deux trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur \mathbb{R} , et la décomposition de D sur \mathbb{R} est achevée.

5. On a

$$\begin{aligned} E &= (X^4 + 1)^2 - 2X^4 \\ &= (X^4 - \sqrt{2}X^2 + 1)(X^4 + \sqrt{2}X^2 + 1) \end{aligned}$$

Poursuivons dans cette voie...

$$\begin{aligned} X^4 - \sqrt{2}X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - (2 + \sqrt{2})X^2 \\ &= (X^2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}X + 1) \times \\ &\quad \times (X^2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}X + 1) \end{aligned}$$

One more time...

$$\begin{aligned} X^4 + \sqrt{2}X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - (2 - \sqrt{2})X^2 \\ &= (X^2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}X + 1) \times \\ &\quad \times (X^2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}X + 1) \end{aligned}$$

Les quatre trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur \mathbb{R} , et la décomposition de E sur \mathbb{R} est achevée.

6. On ne change pas une méthode qui gagne !

$$\begin{aligned} F &= (X^4 + 1)^2 - X^4 \\ &= (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1) \end{aligned}$$

Poursuivons dans cette voie...

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - 2X^2 \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

One more time...

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - X^2 \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Les quatre trinômes étant de discriminants strictement négatifs, ils sont irréductibles sur \mathbb{R} , et la décomposition de E sur \mathbb{R} est achevée.

7. Ca devient lassant...

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 - 12 &= (X^2 - 1/2)^2 - \frac{49}{4} \\ &= (X^2 - 4)(X^2 + 3) \\ &= (X - 2)(X + 2)(X^2 + 3) \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned} H &= (X^3 - 1)(X^3 + 1) \\ &= (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

Solution 18

- Les racines de $X^n + 1$ sont les racines- n èmes de -1 . Puisque $e^{\frac{i\pi}{n}}$ est l'une d'entre-elles, les autres sont

$$\alpha_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \leq n - 1.$$

- On en déduit immédiatement la décomposition du polynôme sur \mathbb{C} .

$$X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_k).$$

- Décomposition sur \mathbb{R} .

• Cas 1 : n est pair, $n = 2m$. On a alors, $\forall 0 \leq k \leq 2m - 1$,

$$\overline{\alpha_k} = \alpha_{n-1-k},$$

d'où

$$\begin{aligned} X^n + 1 &= \prod_{k=0}^{m-1} (X - \alpha_k)(X - \overline{\alpha_k}) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2m}\right) X + 1 \right) \end{aligned}$$

• Cas 2 : n est pair, $n = 2m + 1$. On a alors, $\forall k \leq 2m - 1$,

$$\overline{\alpha_k} = \alpha_{n-1-k},$$

d'où

$$\begin{aligned} X^n + 1 &= (X - 1) \prod_{k=0}^{m-1} (X - \alpha_k)(X - \overline{\alpha_k}) \\ &= (X - 1) \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{m-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2m + 1}\right) X + 1 \right) \end{aligned}$$

Solution 19

1. On a

$$P(i) = P'(i) = 0,$$

mais

$$P''(i) = -8i \neq 0.$$

Le nombre i est donc une racine de P de multiplicité deux.

2. Puisque P est à coefficients réels, $-i$ est également une racine de P de multiplicité deux. P est donc divisible par

$$(X - i)^2(X + i)^2 = (X^2 + 1)^2.$$

En posant la division euclidienne, on trouve

$$P = (X^2 + 1)^2(X^2 + X + 1).$$

Le dernier trinôme étant de discriminant strictement négatif, il est irréductible sur \mathbb{R} , et la décomposition de P sur \mathbb{R} est finie.

Solution 20

1. D'après le cours,

$$\begin{aligned} X^{2n+1} - 1 &= \prod_{k=0}^{2n} (X - e^{2ik\pi/(2n+1)}) \\ &= (X - 1) \prod_{k=1}^{2n} (X - e^{2ik\pi/(2n+1)}) \\ &= (X - 1) \prod_{k=1}^n \left(X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} X + 1 \right). \end{aligned}$$

REMARQUE. On passe de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant par paires les racines complexes conjuguées.

2. D'après la formule de la série géométrique,

$$(X-1) \sum_{k=0}^{2n} X^k = X^{2n+1} - 1.$$

D'après la factorisation précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} X^k &= \prod_{k=1}^{2n} (X - e^{2ik\pi/(2n+1)}) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} X + 1 \right). \end{aligned}$$

3. On s'inspire encore de la formule de la série géométrique :

$$(1 - X^3)(1 + X^3 + X^6 + X^9) = 1 - X^{12}.$$

En notant R , l'ensemble des racines douzièmes de l'unité qui ne sont pas des racines cubiques de l'unité :

$$R = \{-1, e^{\pm i\pi/6}, e^{\pm i\pi/3}, \pm i, e^{\pm 5i\pi/6}\},$$

la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$1 + X^3 + X^6 + X^9 = \prod_{\omega \in R} (X - \omega).$$

On associe les racines conjuguées par paires pour en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} (X+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1) \\ \times (X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Solution 21

1. On a :

$$P(2) = 16 - 72 + 120 - 88 + 24 = 0,$$

$$P'(2) = 32 - 27 \times 4 + 120 - 44,$$

et

$$P''(2) = 12 \times 4 - 54 \times 2 + 60 = 0.$$

Comme

$$P^{(3)}(2) = 24 \times 2 - 9 \times 6 = -8 \neq 0,$$

2 est une racine de P de multiplicité 3.

2. On sait que P est divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $(X-2)^3$. Le quotient de P par $(X-2)^3$ est un polynôme de degré un et unitaire, il est donc de la forme $X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Comme

$$P = (X-2)^3(X-a),$$

on a

$$P(0) = 24 = 8a$$

et donc $a = 3$.

3. D'après ce qui précède,

$$P = (X-2)^3(X-3).$$

Solution 22

1. Comme $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$, on a

$$P(j) = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

et

$$P'(j) = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0.$$

Comme $P''(j) \neq 0$, j est une racine de P de multiplicité 2.

2. Comme P est pair, $-j$ est également une racine de multiplicité 2 de P .
3. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, les nombres $\pm j$ et leurs conjugués $\pm j^2$ sont des racines de multiplicité deux de P . Comme P est de degré 8 et de coefficient dominant 1, on en déduit que

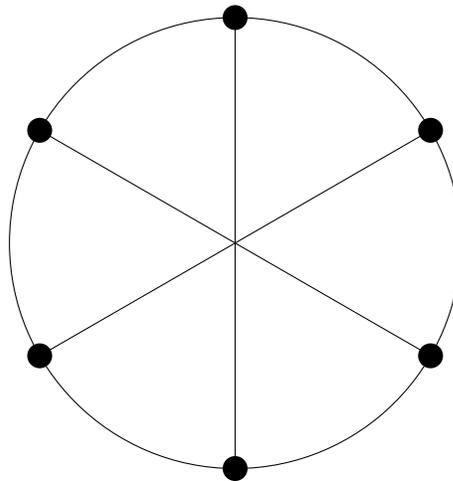
$$P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2$$

et donc

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

Solution 23

1. Une racine cubique de e^{ia} est $e^{\frac{ia}{3}}$. Les trois racines cubiques de e^{ia} sont donc $e^{\frac{ia}{3}}$, $je^{\frac{ia}{3}}$ et $\bar{j}e^{\frac{ia}{3}}$.
2. On sait que $Z^2 - 2Z \cos a + 1 = (Z - e^{ia})(Z - e^{-ia})$. Ainsi (E) équivaut à $(z^3 - e^{ia})(z^3 - e^{-ia}) = 0$. Les solutions de (E) sont donc les racines cubiques de e^{ia} et e^{-ia} . Ce sont donc $e^{\frac{ia}{3}}$, $je^{\frac{ia}{3}}$, $\bar{j}e^{\frac{ia}{3}}$, $e^{-\frac{ia}{3}}$, $je^{-\frac{ia}{3}}$ et $\bar{j}e^{-\frac{ia}{3}}$.
3. a. Dans ce cas, les solutions de (E) sont $e^{\frac{i\pi}{6}}$, $e^{\frac{5i\pi}{6}}$, $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{5i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{3i\pi}{2}} = i$.



- b. On factorise à l'aide des racines et on regroupe les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} z^6 + 1 &= (z - e^{\frac{i\pi}{6}})(z - e^{-\frac{i\pi}{6}})(z - e^{\frac{5i\pi}{6}})(z - e^{-\frac{5i\pi}{6}})(z + i)(z - i) \\ &= (z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{6} + 1)(z^2 - 2z \cos \frac{5\pi}{6} + 1)(z^2 + 1) \\ &= (z^2 - z\sqrt{3} + 1)(z^2 + z\sqrt{3} + 1)(z^2 + 1) \end{aligned}$$

Solution 24

1. On vérifie que $P(1) = P(2) = Q(1) = Q(2) = 0$. On peut donc factoriser P et Q par $(X-1)(X-2)$. On trouve

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X-2)(3X^2+1) \\ Q &= (X-1)(X-2)(X^2+1) \end{aligned}$$

Ce sont bien des décompositions en facteurs irréductibles de P et Q sur $\mathbb{R}[X]$ puisque $3X^2+1$ et X^2+1 sont des polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. On en déduit

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X-2)(3X+i)(3X-i) \\ Q &= (X-1)(X-2)(X+i)(X-i) \end{aligned}$$

qui sont des décompositions de P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On a clairement

$$\begin{aligned} P \wedge Q &= (X-1)(X-2) \\ P \vee Q &= (X-1)(X-2)(X^2+1)\left(X^2 + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Attention, le PPCM doit être unitaire.

Solution 25

S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{m\pi}{n}$, alors $P = X^{2n} - 2(-1)^m X^n + 1$.

- Si m est pair,

$$P = (X^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n .
Si n est pair, alors

$$P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Si n est impair, alors

$$P = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

- Si m est impair,

$$P = (X^n + 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$. Il faut alors distinguer suivant la parité de n .
Si n est pair, alors

$$P = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Si n est impair, alors

$$P = (X+1)^2 \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1\right)^2$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans toutes les expressions précédentes, on convient qu'un produit indexé sur le vide vaut 1 et les facteurs sont bien irréductibles car les cosinus ne valent ni 1 ni -1 .

On suppose maintenant qu'il n'existe pas d'entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{m\pi}{n}$. Remarquons que

$$P = (X^n - e^{ni\theta})(X^n - e^{-ni\theta})$$

On a

$$X^n - e^{ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

et par conjugaison

$$X^n - e^{-ni\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

On en déduit que la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

Les facteurs sont bien irréductibles car la condition $\theta \notin \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ assure qu'aucun des cosinus ne vaut 1 ou -1 .

Solution 26

Première méthode :

Notons $D = (X^n - 1) \wedge (X^p - 1)$. On a

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

et

$$X^p - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_p} (X - \omega)$$

Donc

$$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p} (X - \omega)$$

Montrons que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$.

- Soit $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p$. Notons $d = n \wedge p$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vp = d$. Par conséquent

$$z^d = (z^n)^u (z^p)^v = 1$$

Donc $z \in \mathbb{U}_d$.

- Soit $z \in \mathbb{U}_d$. On a donc $z^d = 1$. Comme $d|n$, on a également $z^n = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. De même, $z \in \mathbb{U}_p$. Ainsi $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p$.

On a donc par double inclusion $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$. Ainsi

$$D = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_d} (X - \omega) = X^d - 1$$

Seconde méthode :

Posons $r_0 = n$ et $r_1 = p$ et notons $(r_k)_{0 \leq k \leq N}$ la suite des restes dans l'algorithme d'Euclide appliqué à n et p . En particulier, $r_{N-1} = n \wedge p$ et $r_N = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $r_k = qr_{k+1} + r_{k+2}$.

$$X^{r_k - r_{k+2}} - 1 = X^{qr_{k+1}} - 1 = (X^{r_{k+1}} - 1)Q$$

en posant $Q = \sum_{j=0}^{q-1} X^{jr_{k+1}}$. Il s'ensuit que

$$X^{rk} - X^{rk+2} = (X^{rk+1} - 1)X^{rk+2}Q$$

ou encore

$$X^{rk} - 1 = X^{rk+2} - 1 + (X^{rk+1} - 1)\tilde{Q}$$

en posant $\tilde{Q} = X^{rk+2}Q$. On en déduit classiquement que $(X^{rk} - 1) \wedge (X^{rk+1} - 1) = (X^{rk+1} - 1) \wedge (X^{rk+2} - 1)$.

REMARQUE. On peut simplifier les choses en utilisant des congruences de polynômes.

$$X^{rk+1} \equiv 1 [X^{rk+1} - 1]$$

donc

$$X^{qr_{k+1}} \equiv 1 [X^{rk+1} - 1]$$

puis

$$X^{qr_{k+1} + rk+2} \equiv X^{rk+2} [X^{rk+1} - 1]$$

et enfin

$$X^{rk} - 1 \equiv X^{rk+2} - 1 [X^{rk+1} - 1]$$

ce qui permet d'aboutir également à $(X^{rk} - 1) \wedge (X^{rk+1} - 1) = (X^{rk+1} - 1) \wedge (X^{rk+2} - 1)$.

Finalement, $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^{n-1} - 1) \wedge (X^n - 1) = (X^{n \wedge p} - 1) \wedge 0 = (X^{n \wedge p} - 1)$.

Solution 27

Puisque P et Q sont à coefficients dans \mathbb{Z} et, a fortiori, à coefficients dans le corps \mathbb{Q} , le théorème de Bézout assure l'existence de deux polynômes U et V de $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$. En notant d le ppcm des dénominateurs des coefficients de U et V écrits sous forme fractionnaire et en posant $A = dU$ et $B = dV$, on a $AP + BQ = d$ avec A et B dans $\mathbb{Z}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(n)P(n) + B(n)Q(n) = d$ de sorte que u_n divise d .

Montrons alors que (u_n) est d -périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(n+d)^k = n^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} n^{k-j} d^j = n^k + cd$$

avec $c \in \mathbb{N}$. On en déduit que $P(n+d) = P(n) + ad$ et $Q(n+d) = Q(n) + bd$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Puisque u_n divise $P(n)$, $Q(n)$ et d , u_n divise $P(n+d)$ et $Q(n+d)$ donc u_n divise u_{n+d} . De même, u_{n+d} divise $P(n+d)$, $Q(n+d)$ et d de sorte que u_{n+d} divise $P(n)$ et $Q(n)$ et donc u_n . On en déduit que $u_{n+d} = u_n$, ce qui prouve que la suite (u_n) est d -périodique.

Solution 28

Il n'y a aucune restriction à supposer P unitaire. Puisque P est scindé, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\mu_i}$. Puisque $P \wedge P'$ divise P , il existe $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $P \wedge P' = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\nu_i}$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque α_i est une racine de P de multiplicité μ_i , la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives montre que α_i est une racine de P' de multiplicité $\mu_i - 1$. Puisque $P \wedge P'$ divise P' , $\nu_i \leq \mu_i - 1$. Finalement, $P \wedge P'$ divise $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$.

Réciproquement, $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$ divise bien P et P' donc divise également $P \wedge P'$. On en déduit que $P \wedge P' = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{\mu_i - 1}$.

Racines

Solution 29

1. Notons P le polynôme définissant l'équation \mathcal{E} . On remarque que pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Im}(P(z)) = z - 2z^2$$

et

$$Q(z) = \operatorname{Re}(P(z)) = 2z^3 - 7z^2 + 11z - 4.$$

Si un nombre z est une racine réelle de \mathcal{E} , nécessairement

$$z = 0 \text{ ou } z = \frac{1}{2}.$$

On vérifie que seule $\frac{1}{2}$ est également racine de Q .

2. Après division euclidienne ,

$$P(z) = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z^2 - (3+i)z + 4).$$

Le discriminant Δ de

$$z^2 - (3+i)z + 4$$

vaut

$$\Delta = -8 + 6i.$$

Soit $\delta = a + ib$ une racine carrée de Δ . On a alors

$$|\delta|^2 = a^2 + b^2 = 10$$

et

$$\operatorname{Re}(\delta^2) = a^2 - b^2 = -8.$$

Puisque $2ab = 6$, on obtient

$$\delta = \pm(1 + 3i).$$

D'où les solutions de l'équation \mathcal{E} ,

$$\frac{1}{2}, 1 - i, 2(1 + i).$$

Solution 30

Si α est une racine de P_n de multiplicité au moins égale à 2, alors

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0.$$

Par différence, on en déduit que

$$P_n(\alpha) - P_n'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

donc $\alpha = 0$. Or, de manière évidente, 0 n'est pas une racine de P_n (puisque $P_n(0) = 1$), donc les racines de P_n sont toutes des racines simples.

Solution 31

1. On remarque que $(X - 1)P_n = X^n - 1$ donc les racines de P_n sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité hormis 1. On a donc

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

2. Calculons $P_n(1)$ de deux façons. D'une part, $P_n(1) = n$ en utilisant l'expression de P_n donnée dans l'énoncé. D'autre part,

$$\begin{aligned} P_n(1) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} -2i \sin \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} (-2i)^{n-1} A_n \\ &= e^{\frac{i\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2}} (-2)^{n-1} i^{n-1} A_n \\ &= e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} (-2)^{n-1} i^{n-1} A_n \\ &= i^{n-1} (-2)^{n-1} A_n \\ &= (i^2)^{n-1} (-2)^{n-1} A_n = 2^{n-1} A_n \end{aligned}$$

Par conséquent, $A_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3. Posons $Q_n = X^n - e^{2in\theta}$. Les racines de Q_n sont les $e^{2i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On a donc la factorisation suivante de Q_n sur \mathbb{C} :

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{2i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \right)$$

D'une part, $Q_n(1) = 1 - e^{2in\theta}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} Q_n(1) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{2i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \left(e^{-i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} - e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)} \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} -2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} + \theta \right) \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) e^{in\theta} (-2)^n i^n B_n \\ &= i^{n-1} e^{in\theta} (-2)^n i^n B_n = 2^{n-1} (-2i) e^{in\theta} B_n \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B_n = \frac{1 - e^{2in\theta}}{2^{n-1} (-2i) e^{in\theta}} = \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}}$$

4.

$$\begin{aligned} C_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^l) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} \omega^k (1 - \omega^{l-k}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} \omega^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} (1 - \omega^{l-k}) \right) \end{aligned}$$

Mais, l'ensemble des ω^{l-k} pour $0 \leq l \leq n-1$ et $l \neq k$ est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité privé de 1. Donc

$$\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} (1 - \omega^{l-k}) = P_n(1) = n$$

Achevons le calcul de C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \prod_{k=0}^{n-1} (\omega^{k(n-1)n}) \\ &= n^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} \\ &= n^n \omega^{-(0+1+\dots+(n-1))} = n^n \omega^{-\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= n^n e^{-i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} n^n \end{aligned}$$

Solution 32

- Supposons que R admette une racine double z . Effectuons la division euclidienne de R par R' ; on trouve $R = \frac{X}{3}R' + \frac{2X}{3} + 1$. Comme z est une racine double $R(z) = R'(z) = 0$. On en déduit que $\frac{2z}{3} + 1 = 0$ et donc $z = -\frac{3}{2}$. Or il est évident que $-\frac{3}{2}$ n'est pas racine de P . Les racines de P sont donc toutes simples. Puisque $\deg P = 3$, P admet trois racines complexes distinctes.
 - Les complexes a, b, c étant distincts, les complexes $-a, -b, -c$ sont également distincts. Si z est une racine de P , alors $z^3 + z = -1$. Ainsi $P(-z) = -z^3 - z + 1 = 2$. Donc $-z$ n'est pas une racine de P . Ceci prouve que $\{a, b, c\} \cap \{-a, -b, -c\} = \emptyset$. Finalement, les complexes $a, b, c, -a, -b, -c$ sont tous distincts.
 - Le polynôme $P(X)P(-X)$ est pair donc il existe un unique polynôme Q tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.
 - On a $R(X)R(-X) = -X^6 - 2X^4 - X^2 + 1 = Q(X^2)$ avec $Q = -X^3 - 2X^2 - X + 1$. On a donc $Q(a^2) = R(a)R(-a) = 0$ car a est racine de R . Ainsi a^2 est racine de Q . De même, b^2 et c^2 sont racines de Q . Comme les complexes $a, b, c, -a, -b, -c$ sont distincts, les complexes a^2, b^2, c^2 le sont aussi. Puisque $\deg Q = 3$, a^2, b^2, c^2 sont les seules racines de Q .
- REMARQUE.** On n'a pas vraiment utilisé le résultat de la deuxième question qui nous suggérait seulement le polynôme adéquat.

Solution 33

- On a alors $P = (X - a)^2$ et $P(X^3) = (X^3 - a)^2$.
Supposons que P divise $P(X^3)$. Comme a est une racine de P , a est également une racine de $P(X^3)$. On a donc $a^3 = a$ i.e. $a \in \{0, 1, -1\}$. Réciproquement :
 - si $a = 0$ alors $P = X^2$ et $P(X^3) = X^6$ donc P divise $P(X^3)$;
 - si $a = 1$, alors $P = (X - 1)^2$ et $P(X^3) = (X^3 - 1)^2 = (X - 1)^2(X^2 + X + 1)^2$ et P divise $P(X^3)$;
 - si $a = -1$, alors $P = (X + 1)^2$ et $P(X^3) = (X^3 + 1)^2 = (X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2$ et P divise $P(X^3)$.
- Dans ce cas, P divise $P(X^3)$ si et seulement si a et b sont racines de $P(X^3) = (X^3 - a)(X^3 - b)$. Ceci équivaut à $(a^3 = a$ ou $a^3 = b)$ et $(a^3 = b$ et $b^3 = a)$. Comme $a^3 \neq b^3$, on a nécessairement $(a^3 = a$ et $b^3 = b)$ ou $(a^3 = b$ et $b^3 = a)$.
 - Cas où $a^3 = a$ et $b^3 = b$: ceci équivaut à $a \in \{0, 1, -1\}$ et $b \in \{0, 1, -1\}$. Comme $a \neq b$, les paires $\{a, b\}$ possibles sont $\{0, 1\}$, $\{0, -1\}$, $\{1, -1\}$. On a bien également $a^3 \neq b^3$ et les polynômes P correspondants sont $X(X - 1)$, $X(X + 1)$ et $(X - 1)(X + 1)$.
 - Cas $a^3 = b$ et $b^3 = a$: ceci équivaut à $a^9 = a$ et $b = a^3$. On ne peut avoir $a = 0$ car sinon $b = 0$ et $a = b$, ce qui est exclu. D'où $a^8 = 1$ et a est une racine huitième de l'unité. De plus, a ne peut être une racine carrée de l'unité, sinon $a^3 = a$ et $b^3 = a^3$, ce qui est exclu. On doit donc traiter les 6 cas suivants :
 - Si $a = e^{\frac{i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 - i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
 - Si $a = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, alors $b = a^3 = -i$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
 - Si $a = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{\frac{i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 - i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
 - Si $a = e^{-\frac{i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 + i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
 - Si $a = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$, alors $b = a^3 = i$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
 - Si $a = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, alors $b = a^3 = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. On a bien $a^3 \neq b^3$ et $P = (X - a)(X - b) = X^2 + i\sqrt{2}X - 1 \notin \mathbb{R}[X]$.
 Finalement, on obtient 4 polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$, à savoir $X(X - 1)$, $X(X + 1)$, $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et 2 autres polynômes P , à savoir $X^2 - i\sqrt{2}X - 1$ et $X^2 + i\sqrt{2}X - 1$.
- Il reste donc à traiter les cas $(a^3 = a$ et $b^3 = a)$ ou $(b^3 = b$ et $a^3 = b)$. Il suffit de traiter l'un des deux cas puisqu'on obtient l'autre en permutant a et b et qu'une permutation de a et b fournit le même polynôme P . Traitons donc le cas $a^3 = a$ et $b^3 = a$. On ne peut avoir $a = 0$ sinon $b = 0$ et $a = b$.
 - Si $a = 1$, alors $b = j$ ou $b = j^2$ (on ne peut avoir $b = 1$). On a alors $P = (X - 1)(X - j) = X^2 + j^2X + j$ ou $P = (X - 1)(X - j^2) = X^2 + jX + j^2$.

- Si $a = -1$, alors $b = -j$ ou $b = -j^2$ (on ne peut avoir $b = -1$). On a alors $P = (X + 1)(X + j) = X^2 - j^2X + j$ ou $P = (X + 1)(X + j^2) = X^2 - jX + j^2$.

4. Faisons le compte : 13 polynômes conviennent ! Ce sont X^2 , $(X - 1)^2$, $(X + 1)^2$, $X(X - 1)$, $X(X + 1)$, $X^2 - 1$, $X^2 + 1$, $X^2 - i\sqrt{2}X - 1$, $X^2 + i\sqrt{2}X - 1$, $X^2 + j^2X + j$, $X^2 + jX + j^2$, $X^2 - j^2X + j$, $X^2 - jX + j^2$. Les 7 premiers sont dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution 34

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines réelles de P et m_1, \dots, m_r leurs multiplicités. Puisque P est scindé sur \mathbb{R} , $\sum_{i=1}^r m_i = \deg P$. Remarquons tout d'abord que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P' de multiplicités respectives $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$. Par ailleurs, le théorème de Rolle permet de trouver une racine réelle de P' entre deux racines consécutives de P donc $r - 1$ racines de plus. Finalement, la somme des multiplicités des racines réelles de P' est au moins égale à

$$r - 1 + \sum_{i=1}^r m_i - 1 + \deg P - 1$$

Puisque $\deg P' = \deg P - 1$, la somme des multiplicités des racines réelles de P' est donc exactement $\deg P'$, ce qui signifie que P' est scindé sur \mathbb{R} .

Solution 35

Dans ce qui suit, on pose $n = \deg(P)$.

Supposons que P soit scindé sur \mathbb{R} . Il existe donc des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$. On montre aisément que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq |\operatorname{Im}(z)|$. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |z - \alpha_k| \geq |\operatorname{Im}(z - \alpha_k)| = |\operatorname{Im}(z)|$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient bien

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^n |z - \alpha_k| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Réciproquement, supposons que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Soit α une racine de P . Alors $|\operatorname{Im}(\alpha)|^n \leq |P(\alpha)|^n = 0$ donc $\operatorname{Im}(\alpha) = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi P est-il bien scindé sur \mathbb{R} .

Solution 36

1. Trigonométrie bête et méchante :

$$\cos((n + 1)\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos \theta$$

2. Si T_n et \tilde{T}_n vérifient

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(2 \cos \theta) = \tilde{T}_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$$

alors les polynômes T_n et \tilde{T}_n coïncident sur l'ensemble infini $2 \cos(\mathbb{R}) = [-2, 2]$. Il sont donc égaux. Voici prouvée l'unicité de T_n . Pour l'existence, on procède par récurrence. On note \mathcal{P}_n la propriété de l'énoncé. \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies : il suffit de poser $T_0 = 2$ et $T_1 = X$. Supposons que \mathcal{P}_{n-1} et \mathcal{P}_n soient vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos((n + 1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n - 1)\theta) = 2 \cos(\theta)T_n(2 \cos \theta) - T_{n-1}(2 \cos \theta)$$

Il suffit donc de poser $T_{n+1} = XT_n - T_{n-1}$ pour que \mathcal{P}_{n+1} soit vraie. Par récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. Ces polynômes T_n sont «presque» les polynômes de Tchebychev.

3. Posons $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Soit r une racine rationnelle de P . Il existe donc $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = p/q$ et on peut supposer $p \wedge q = 1$. La relation $P(r) = 0$ peut s'écrire

$$p^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

ou encore

$$p^n = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k}$$

Remarquons que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k} \in \mathbb{Z}$ (toutes les puissances sont des entiers naturels). Ainsi q divise p^n . Mais comme $p \wedge q = 1$, $q = 1$. Ainsi $r = p \in \mathbb{Z}$.

4. On a montré à la question 2 que $T_{n+1} = XT_n - T_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On prouve alors aisément par récurrence double que les T_n sont de degré n à coefficients entiers. Puisqu'alors $\deg T_{n-1} < \deg(XT_n)$, cette même relation permet d'affirmer que T_{n+1} a le même coefficient dominant que T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $T_1 = X$ est unitaire, les T_n sont unitaires pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\theta = 2p\pi/q$. Mais alors

$$T_q(2 \cos \theta) = 2 \cos(q\theta) = 2 \cos(2p\pi) = 2$$

On en déduit que $2 \cos \theta$ est une racine rationnelle du polynôme unitaire à coefficients entiers T_q . La question précédente montre que $2 \cos \theta$ est entier. Comme \cos est à valeurs dans $[-1, 1]$, $\cos \theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. On en déduit que $\theta \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

5. Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $\sin \theta \in \mathbb{Q}$. Remarquons que $\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta)$. Or $\pi/2 - \theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ donc $\sin \theta \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ et $\pi/2 - \theta \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ i.e. $\theta \in \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
6. Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $\tan \theta \in \mathbb{Q}$. Alors $\cos(2\theta) = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$ et $\sin(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta}$ sont également rationnels. On en déduit que $2\theta \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ i.e. $\theta \in \frac{\pi}{6}\mathbb{Z} \cup \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ et que $2\theta \in \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ i.e. $\theta \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\mathbb{Z}\right) \cup \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$. Ces deux conditions équivalent à $\theta \in \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ et même à $\theta \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \pi\mathbb{Z}$ car $\tan \theta$ n'est pas défini pour $\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Les valeurs de $\tan \theta$ associées sont $-1, 0, 1$.

Solution 37

1. • Si $n = 0$, $T_0 = 2 - X$ admet une unique racine réelle : 2.
 • Si $n = 1$, $T_1 = 1$ n'admet aucune racine.
 • On suppose $n \geq 2$. Puisque $T'_n = nX^{n-1} - 1$, $T'_n(x) = 0 \iff x^{n-1} = 1/n$, et il faut discuter selon la parité de n :
 – si n est pair, T_n admet une unique racine $x_n = (1/n)^{1/(n-1)}$. Notons que $0 < x_n < 1$. n étant pair et non nul, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T_n(x) = +\infty$, et puisque $0 < x_n < 1$ on a $T_n(x_n) > -x_n + 1 > 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) > 0$ et donc T_n n'admet aucune racine réelle.
 – si n est impair, T'_n admet deux racines $x_n = (1/n)^{1/(n-1)}$ et $y_n = -x_n$, et T_n est croissante sur $] -\infty, y_n[$ et sur $[x_n, +\infty[$, décroissante sur $[y_n, x_n]$. n étant impair et différent de 1, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} T_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} T_n(x) = -\infty$, et on a toujours $T_n(x_n) > 0$. On en déduit que T_n admet une unique racine réelle appartenant à $] -\infty, y_n[$.
2. Pour $n = 0$ ou 1 c'est évident.
 Soit $n \geq 2$. On sait que T_n est scindé sur \mathbb{C} . Cherchons une éventuelle racine double $z \in \mathbb{C}$. Alors z vérifie $T_n(z) = T'_n(z) = 0$. $T'_n(z) = 0 \Rightarrow z^{n-1} = 1/n$, et $T_n(z) = 0 \Rightarrow z = z^n + 1 = zz^{n-1} + 1 = \frac{z}{n} + 1$ d'où $z(1 - 1/n) = 1$ i.e. $z = \frac{n}{n-1}$. Ceci implique $z \in \mathbb{R}$ et $z > 1$, et z n'est donc pas racine de T_n d'après l'étude du 1.
 On en conclut que T_n n'a aucune racine double.

Lien coefficients/racines

Solution 38

- Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ vérifiant le système. Notons σ_k les fonctions symétriques élémentaires associées à x, y, z . On a

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_3 = 1,$$

et puisque

$$\sigma_2 = xy + yz + xz = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Mais puisque $\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} = \bar{z}$,

$$\sigma_2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \bar{\sigma}_1 = 1.$$

Les nombres x, y, z sont donc *nécessairement* les racines du polynôme

$$P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X - i)(X + i).$$

- *Réciproquement*, on vérifie facilement que les nombres $1, \pm i$ sont solutions du système de l'énoncé.

Solution 39

Notons σ_k les fonctions symétriques élémentaires associées à x, y, z . On reprend la notation S_k des sommes de Newton. Le système s'écrit alors

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 9, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1.$$

On a les relations

$$S_1 = \sigma_1,$$

puis

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

On en déduit sans peine les formules *inverses*,

$$\sigma_1 = S_1,$$

puis

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

Du fait de cette *inversibilité* des formules, le système de l'énoncé est équivalent à

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -4, \quad \sigma_3 = \sigma_2 = -4,$$

ie x, y, z sont racines du polynôme

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 2).$$

Solution 40

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre i n'étant pas racine de P_n ,

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^n = 1$$

Ainsi, $P_n(z) = 0$ si et seulement si

$$\exists 0 \leq k \leq n - 1, \quad \frac{z + i}{z - i} = e^{2ik\frac{\pi}{n}}$$

ie $\exists 0 \leq k \leq n - 1$ tel que

$$z(1 - e^{2ik\pi/n}) = -i(1 + e^{2ik\pi/n})$$

c'est-à-dire

$$\exists 1 \leq k \leq n - 1, \quad z = -i \frac{1 + e^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}}$$

où l'on a exclu la valeur $k = 0$ pour laquelle l'équation n'a aucune solution en z . On trouve ainsi toutes les solutions en passant à l'arc moitié, pour tout entier $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\begin{aligned} z_k &= -i \frac{1 + e^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}} = -i \frac{2 \cos(k\pi/n) e^{ik\pi/n}}{-2i \sin(k\pi/n) e^{ik\pi/n}} \\ &= \cotan(k\pi/n) \end{aligned}$$

Par injectivité de la fonction cotangente sur $]0, \pi[$, on trouve $n - 1$ racines distinctes.

2. En utilisant la formule du binôme, on aboutit à

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} X^k \\ &= 2inX^{n-1} + 0 \cdot X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \dots \\ &\quad \dots + a_1X + i^n - (-i)^n \end{aligned}$$

Ainsi P_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2in$; on peut donc écrire (cf. la première question de l'exercice),

$$\begin{aligned} P_n &= 2in \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cotan(k\pi/n)) \\ &= 2in(X^{n-1} - A_n X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} B_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$-2inA_n = 0,$$

et

$$i^n - (-i)^n = 2i \operatorname{Im}(i^n) = 2i \sin(n\pi/2) = 2in(-1)^{n-1} B_n$$

ainsi

$$A_n = 0$$

et

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\pi/2).$$

Solution 41

1. Exploisons les égalités $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ en effectuant la division euclidienne de X^4 par P . On trouve sans peine $X^4 = XP + 2X^2 - 5X$. Ainsi $a^4 = 2a^2 - 5a$, $b^4 = 2b^2 - 5b$ et $c^4 = 2c^2 - 5c$, d'où $S = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 5(a + b + c)$. Notons σ_1, σ_2 et σ_3 les fonctions symétriques d'ordre trois évaluées en a, b et c . Puisque

$$P = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - 2X + 5,$$

on a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$ et $\sigma_3 = -5$. Or, $\sigma_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma_2$, d'où $a^2 + b^2 + c^2 = (0)^2 - 2 \times (-2) = 4$. Ainsi, $S = 2 \times 4 - 5 \times 0 = 8$.

2. Il suffit de calculer les fonctions symétriques élémentaires en a^2, b^2 et c^2 . Notons-les Σ_1, Σ_2 et Σ_3 . On a clairement $\Sigma_3 = a^2 b^2 c^2 = (\sigma_3)^2 = 25$ et on a déjà calculé $\Sigma_1 = a^2 + b^2 + c^2 = 4$. On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= (ab + bc + ac)^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 + 2(a^2 bc + ab^2 c + abc^2) \\ &= \Sigma_2 + 2abc(a + b + c) = \Sigma_2 + 2\sigma_3 \sigma_1 = \Sigma_2 + 2 \times (-5) \times 0 = \Sigma_2 \end{aligned}$$

et donc $\Sigma_2 = \sigma_2^2 = 4$. Les nombres a^2, b^2 et c^2 sont donc les racines du polynôme $Q = X^3 - 4X^2 + 4X - 25$.

Solution 42

En multipliant la seconde équation par xyz , on obtient $xy + yz + zx = 0$. Notons $a = xyz$. En utilisant les relations coefficients/racines d'un polynôme, on peut affirmer que x, y, z sont les racines du polynôme $X^3 - a$. Ce sont donc les racines cubiques de a qui ont toutes le même module.

Solution 43

1. a. $(X + i)^{n+1}$ et $(X - i)^{n+1}$ sont de degré $n + 1$ donc $\deg Q_n \leq n + 1$. Mais $(X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1}$ ont le même coefficient dominant (à savoir 1) donc $\deg Q_n \leq n$. Les coefficients de X^n dans $(X + i)^{n+1}$ et $(X - i)^{n+1}$ sont respectivement $(n + 1)i$ et $-(n + 1)i$ (utiliser la formule du binôme) donc le coefficient de X^n dans Q_n est $n + 1$ et il est donc non nul. On en déduit que $\deg Q_n = n$.

b. D'après la formule du binôme

$$\begin{aligned} Q_{2r} &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{k} i^k X^{2r+1-k} - \sum_{k=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{k} (-i)^k X^{2r+1-k} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2r+1} (i^k - (-i)^k) \binom{2r+1}{k} X^{2r+1-k} \end{aligned}$$

Pour k pair, $i^k = (-i)^k$ donc il ne reste dans cette somme que les termes d'indice impair. Ainsi

$$\begin{aligned} Q_{2r} &= \frac{1}{2i} \sum_{p=0}^r (i^{2p+1} - (-i)^{2p+1}) \binom{2r+1}{2p+1} X^{(2r+1)-(2p+1)} \\ &= \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p} \end{aligned}$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de résoudre l'équation $(E_n) : (z+i)^{n+1} = (z-i)^{n+1}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Remarquons que i n'est pas solution de sorte que (E_n) équivaut à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} = 1$. Ainsi z est solution de (E_n) si et seulement si il existe $\omega \in \mathbb{U}_{n+1}$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = \omega$. Ceci équivaut à l'existence de $\omega \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$ tel que $z = i \frac{\omega+1}{\omega-1}$. Les solutions de (E_n) i.e. les racines de Q_n sont donc

$$\text{les } x_k = i \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} - 1} \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Par la méthode de l'arc-moitié, on obtient, $x_k = \cot \frac{k\pi}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

b. On a vu plus haut que le coefficient dominant de Q_n était $n+1$. Comme $\deg Q_n = n$, les x_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont toutes des racines simples. On en déduit que la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est

$$Q_n = (n+1) \prod_{k=1}^n (X - x_k) = (n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cot \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

c. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la question précédente,

$$\begin{aligned} Q_{2r} &= (2r+1) \prod_{k=1}^{2r} \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \\ &= (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \prod_{k=r+1}^{2r} \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \\ &= (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \frac{(2r+1-k)\pi}{2r+1} \right) \\ &= (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \left(\pi - \frac{k\pi}{2r+1} \right) \right) \\ &= (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X - \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \prod_{k=1}^r \left(X + \cot \frac{k\pi}{2r+1} \right) \\ &= (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X^2 - \cot^2 \frac{k\pi}{2r+1} \right) \end{aligned}$$

d. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$T_r = \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{r-p}$$

de sorte que $Q_{2r} = T_r(X^2)$. Les racines de T_r sont donc les $\cot^2 \frac{k\pi}{2r+1}$ pour $1 \leq k \leq r$.

Le coefficient dominant de T_r est le même que celui de Q_{2r} , à savoir $2r+1$. Le coefficient de X^{r-1} dans T_r est $-\binom{2r+1}{3}$. Les liens coefficients/racines nous apprennent donc que

$$\sum_{k=1}^r \cot^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{\binom{2r+1}{3}}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$

De plus, $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = r + \frac{r(2r-1)}{3} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

3. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

\sin est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin' c$. Puisque $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin' c = \cos c < 1$. On en déduit $\sin x < x$.

\tan est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \tan' c$. Puisque $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan' c = 1 + \tan^2 c > 1$. On en déduit $\tan x > x$.

On a donc $\sin x < x < \tan x$. Puisque ces trois membres sont strictement positifs, $\cot x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ puis $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$.

4. Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2r+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. D'après la question précédente,

$$\cot^2 \frac{k\pi}{2r+1} < \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2} < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}}$$

En additionnant ces inégalités lorsque $1 \leq k \leq r$, on obtient via la question 2.d

$$\frac{r(2r-1)}{3} < \frac{(2r+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} < \frac{2r(r+1)}{3}$$

ou encore

$$\frac{r(2r-1)\pi^2}{3(2r+1)^2} < \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} < \frac{2r(r+1)\pi^2}{3(2r+1)^2}$$

Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Suites de polynômes

Solution 44

1. On a $\sin(n+1)\theta \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} (n+1)\theta$ et $\sin \theta \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$. On en déduit que $\lim_{\theta \rightarrow 0} f_n(\theta) = n+1$.

Posons $\theta = \pi + h$. Alors $\sin(n+1)\theta = \sin((n+1)\pi + (n+1)h) = (-1)^{n+1} \sin(n+1)h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} (-1)^{n+1}(n+1)h$ et $\sin \theta = \sin(\pi + h) = -\sin h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h$. On en déduit que $\lim_{\theta \rightarrow \pi} f_n(\theta) = (-1)^n(n+1)$.

Ainsi f_n est prolongeable par continuité en 0 et π . Si on note encore Q_n ce prolongement, on a $f_n(0) = (n+1)$ et $f_n(\pi) = (-1)^n(n+1)$.

2. **Unicité** Si P_n et Q_n sont deux polynômes tels que $P_n(x) = Q_n(x) = f_n(\arccos x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, alors le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines ; il est nul i.e. $P_n = Q_n$.

Existence Soit $\theta \in [0, \pi]$. $\sin(n+1)\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1}$. A l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k (\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n+1-k}$$

Comme i^k est réel pour k pair et imaginaire pur pour k impair, on en déduit que :

$$\sin(n+1)\theta = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (\sin \theta)^{2k+1} (\cos \theta)^{n-2k}$$

En divisant par $\sin \theta$ pour $\theta \in]0, \pi[$, on obtient :

$$f_n(\theta) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (\sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^{n-2k}$$

La formule est encore valable pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ par continuité des deux membres de la dernière égalité. On peut également réécrire cette égalité sous la forme :

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (1 - \cos^2 \theta)^k (\cos \theta)^{n-2k} \\ &= \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (\cos^2 \theta - 1)^k (\cos \theta)^{n-2k} \end{aligned}$$

On a alors pour $x \in [-1, 1]$:

$$f_n(\arccos x) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (x^2 - 1)^k x^{n-2k}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.

On a $\deg(X^2 - 1)^k X^{n-2k} = n$ et $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} \neq 0$ donc $\deg P_n = n$.

Soit $x \in [-1, 1]$. On a alors :

$$P_n(-x) = f_n(\arccos(-x)) = f_n(\pi - \arccos x) = (-1)^n f_n(\arccos x) = (-1)^n P_n(x)$$

Les polynômes $P_n(-X)$ et $(-1)^n P_n(X)$ coïncident sur $[-1, 1]$; ils sont égaux. On en déduit que P_n a la parité de n .

3. $P_n(1) = f_n(\arccos 1) = f_n(0) = (n+1)$.

$P_n(-1) = f_n(\arccos -1) = f_n(\pi) = (-1)^n (n+1)$.

$P_n(0) = f_n(\arccos 0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Pour $x \in]-1, 1[$, $P'_n(x) = -\frac{f'_n(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $P'_n(0) = -f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or pour $\theta \in]0, \pi[$,

$$f'_n(\theta) = \frac{(n+1) \cos(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(n+1)\theta \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

donc $f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = (n+1) \cos(n+1)\frac{\pi}{2}$.

• Si n est pair, $P'_n(0) = -f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

• Si n est impair, $P'_n(0) = -f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = (n+1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $|f_n(\theta)| \leq n$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. C'est évidemment vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$f_{n+1}(\theta) = \frac{\sin n\theta \cos \theta + \sin \theta \cos n\theta}{\sin \theta} = f_n(\theta) \cos \theta + \cos n\theta$$

cette égalité étant encore vraie pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ par continuité. Par conséquent,

$$|f_{n+1}(\theta)| \leq |f_n(\theta)| |\cos \theta| + |\cos n\theta| \leq n + 1$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. L'hypothèse de récurrence est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $P_n(x) = f_{n+1}(\arccos x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, on en déduit que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P_n(x)| \leq n + 1$, ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $\theta \in [0, \pi]$. On connaît son formulaire de trigonométrie (formules de factorisation) : $\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2 \sin(n+1)\theta \cos \theta$. On en déduit que $f_{n+1}(\theta) + f_{n-1}(\theta) = 2f_n(\theta) \cos \theta$ (on utilise la continuité pour la validité de cette égalité en 0 et π). D'où $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. On peut alors passer à une égalité entre polynômes : $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.

6. $f_n = P_n \circ \cos$ donc f_n est de classe \mathcal{C}^∞ comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Faisons comme l'indique l'énoncé. On obtient $\sin \theta f_n'' + 2 \cos \theta f_n' - \sin \theta f_n = -(n+1)^2 \sin(n+1)\theta$ i.e. $f_n'' + 2 \cot \theta f_n' + n(n+2)f_n = 0$. f_n est donc solution de l'équation différentielle $y'' + 2 \cot \theta y' + n(n+2)y = 0$.

7. On a $f_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Donc $f_n'(\theta) = -P_n'(\cos \theta) \sin \theta$ et $f_n''(\theta) = P_n''(\cos \theta) \sin^2 \theta - P_n'(\cos \theta) \cos \theta$. Comme f_n est solution de $y'' + 2 \cot \theta y' + n(n+2)y = 0$, on a $P_n''(\cos \theta) \sin^2 \theta - 3P_n'(\cos \theta) \cos \theta + n(n+2)P_n(\cos \theta) = 0$. Donc, en posant $x = \cos \theta$:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 3xP_n'(x) + n(n+2)P_n(x) = 0$$

Cette égalité est vraie pour $x \in [-1, 1]$ et donc pour $x \in \mathbb{R}$ toujours avec le même argument. On en déduit que P_n est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$.

8. On a $P' = \sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1}$ donc $3XP' = \sum_{k=0}^n 3k a_k X^k$.

On a $P'' = \sum_{k=0}^n k(k-1) a_k X^{k-2}$ donc

$$(1-X^2)P'' = \sum_{k=0}^n k(k-1) a_k X^{k-2} - \sum_{k=0}^n k(k-1) a_k X^k = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) a_{k+2} X^k - \sum_{k=0}^n k(k-1) a_k X^k$$

On déduit de l'équation différentielle vérifiée par P_n que

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} - k(k-1) a_k - 3k a_k + n(n+2) a_k = 0$$

On obtient après simplification :

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+2)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

• Si n est pair, posons $n = 2p$. On sait que P_n est pair donc les coefficients d'indice impair sont nuls. Par récurrence

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^k a_0 \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(2p-2l)(2p+2l+2)}{(2l+2)(2l+1)} = (-1)^k a_0 \frac{(2^k \prod_{l=0}^{k-1} (p-l)) (2^k \prod_{l=0}^{k-1} (p+l+1))}{(2k)!} \\ &= (-1)^k a_0 \frac{2^{2k} \prod_{l=p-k+1}^{p+k} l}{(2k)!} = (-1)^k a_0 \frac{(p+k)!}{(p-k)!(2k)!} = (-1)^k 2^{2k} \binom{p+k}{2k} a_0 \end{aligned}$$

Or $a_0 = P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^p$. D'où $a_{2k} = (-1)^{p+k} 2^{2k} \binom{p+k}{2k}$.

• Si n est impair, posons $n = 2p+1$. On sait que P_n est impair donc les coefficients d'indice pair sont nuls. Par récurrence,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= (-1)^k a_1 \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(2p-2l)(2p+2l+4)}{(2l+3)(2l+2)} = (-1)^k a_1 \frac{(2^k \prod_{l=0}^{k-1} (p-l)) (2^k \prod_{l=0}^{k-1} (p+l+2))}{(2k+1)!} \\ &= (-1)^k a_1 \frac{2^{2k} \prod_{l=p-k+1}^{p+k+1} l}{(p+1)(2k+1)!} = (-1)^k a_1 \frac{2^{2k} (p+k+1)!}{(p+1)(p-k)!(2k+1)!} = (-1)^k a_1 \frac{2^{2k}}{p+1} \binom{p+k+1}{2k+1} \end{aligned}$$

Or $a_1 = P_n'(0) = (n+1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} = 2(p+1)(-1)^p$. D'où $a_{2k+1} = (-1)^{p+k} 2^{2k+1} \binom{p+k+1}{2k+1}$.

Solution 45

1. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $\Phi(P) = P(X+1) + P(X)$. Il est clair que $\deg \Phi(X^n) = n$. L'image de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme. Le polynôme X^n admet donc un unique antécédent P_n par Φ qui vérifie donc la condition de l'énoncé.

2. Si on dérive la relation $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$, on obtient $P_n'(X+1) + P_n'(X) = 2nX^{n-1}$. De plus, $P_{n-1}(X+1) + P_{n-1}(X) = X^{n-1}$. Par conséquent, $\Phi(P_n') = \Phi(nP_{n-1})$. Comme Φ est injectif, $P_n' = nP_{n-1}$.

3. La famille $(2X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. La famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est l'image réciproque de cette base par l'isomorphisme Φ , c'est donc aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.
4. On a $\Phi(P_n) = 2X^n$ donc $\Phi(P_n(X+1)) = 2(X+1)^n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Phi(P_n(X+1)) &= \sum_{k=0}^n 2 \binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi(P_k) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k\right)\end{aligned}$$

Comme Φ est un isomorphisme, on en déduit :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$$

5. Posons $Q_n(X) = P_n(1-X)$. Alors

$$\Phi(Q_n) = Q_n(X+1) + Q_n(X) = P_n(-X) + P_n(1-X)$$

Par ailleurs, en substituant $-X$ à X dans la relation

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$

on obtient :

$$P_n(1-X) + P_n(-X) = 2(-1)^n X^n = (-1)^n \Phi(P_n)$$

Comme Φ est injectif, on a donc $Q_n = (-1)^n P_n$ i.e. $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Solution 46

1. On trouve $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$ et $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. On montre que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ par récurrence double. On en déduit directement que P_n a la parité de n .
3. On montre par récurrence simple que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$ (le coefficient dominant de P_0 est évidemment 1).
4. a. Le résultat se montre par récurrence simple en remarquant que $\cos((n+1)x) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x)$.
- b. Fixons $n \in \mathbb{N}$. En posant $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $P_n(x_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ d'après la question précédente. Les réels x_0, \dots, x_{n-1} sont donc *des* racines de P_n . De plus, les réels $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ appartiennent tous à l'intervalle $[0, \pi]$ sur lequel \cos est injective. Les n réels x_0, \dots, x_{n-1} sont donc bien deux à deux distincts. Puisque $\deg P_n = n$, ces réels sont exactement *les* racines de P_n et ces racines sont simples.

Solution 47

1. Procédons en deux temps.

- Puisque $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\deg(P) = \deg(P(X+1)) \leq n,$$

on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $W = \Delta(P + \lambda Q)$. On a alors,

$$\begin{aligned}W &= (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\ &= \Delta(P) + \lambda \Delta(Q)\end{aligned}$$

2. On remarque que $\forall k \leq n$,

$$\deg(\Gamma_k) = k.$$

La famille $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ est étagée en degré, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Séparons les cas $k = 0$ et $k > 0$.

- On a clairement $\Delta(\Gamma_0) = 0$.
- Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma_k) &= (X+1)X \cdots (X-k+3)(X-k+2) \\ &\quad - X \cdots (X-k+2)(X-k+1) \\ &= (X+1-X+k-1)X \cdots (X-k+2) \end{aligned}$$

ainsi $\Delta(\Gamma_k) = k\Gamma_{k-1}$.

- D'après les calculs précédents,

$$\text{Im}(\Delta_n) = \text{vect}(\Delta_n(\Gamma_0), \dots, \Delta_n(\Gamma_n)) = \text{vect}(\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1})$$

et ainsi, d'après la question 2.,

$$\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

- D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\Delta_n)) = 1,$$

or $\text{vect}(\Gamma_0) \subset \text{Ker}(\Delta_n)$, on a donc

$$\text{Ker}(\Delta_n) = \text{vect}(\Gamma_0) = \mathbb{R}_0[X].$$

4. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$\Delta_n^\ell(\Gamma_0) = 0,$$

puis, pour $k \geq \ell$,

$$\Delta_n^\ell(\Gamma_k) = \frac{k!}{(k-\ell)!} \Gamma_{k-\ell},$$

et dans le cas contraire,

$$\Delta_n^\ell(\Gamma_k) = 0.$$

En particulier,

$$(\Delta_n)^{n+1} = 0$$

mais $(\Delta_n)^n \neq 0$. L'endomorphisme Δ_n est donc nilpotent d'indice $n+1$.

5. Notons Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P \longmapsto P(X+1) - P.$$

Le cas $Q = 0$ étant banal, supposons

$$n = \deg(Q) \geq 0.$$

Puisque l'égalité de l'énoncé est équivalente à $\Delta(P) = Q$ et que $\text{Im}(\Delta_{n+1}) = \mathbb{R}_n[X]$, il existe une solution P_0 . Un polynôme P est une autre solution si et seulement si

$$\Delta(P) = \Delta(P_0),$$

ie

$$\Delta(P - P_0) = 0,$$

soit encore

$$P - P_0 \in \text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X].$$

Les solutions sont donc de la forme

$$P + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

REMARQUE. L'égalité $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ se démontre en reprenant point par point l'argument exposé à la question 3. pour calculer le noyau de Δ_n .

6. Calculons de proche en proche...

- Puisque

$$\Delta(\Gamma_2/2) = \Gamma_1 = X,$$

$P_1 = \Gamma_2/2$ convient.

- De même,

$$X^2 = \Gamma_2 + \Gamma_1 = \Delta(\Gamma_2/2 + \Gamma_1/3),$$

donc $P_2 = \Gamma_2/2 + \Gamma_1/3$ convient.

- On a ,

$$X^3 = \Gamma_3 + 3\Gamma_2 + \Gamma_1 = \Delta(\Gamma_4/4 + \Gamma_3 + \Gamma_2/2),$$

ainsi $P_3 = \Gamma_4/4 + \Gamma_3 + \Gamma_2/2$ convient.

7. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$S_n^i = P_i(n+1)$$

(il s'agit d'un simple telescoping!). On aboutit à

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

REMARQUE. L'esprit (qu'il faut retenir!) de cette fin d'exercice, est que les calculs liés à Δ (ici un calcul d'antécédent), « se font bien » dans la base des Γ_k plutôt que dans la base canonique ! *Il faut* donc travailler dans cette base...

Solution 48

1. On a $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$, puis $P_4 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.

2. Récurrence double classique.

3. Le coefficient dominant de P_n est égal à 1.

4. On prouve par une nouvelle récurrence double que $P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2 \cdot (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}$.

5. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

On raisonne par récurrence double :

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a bien-sûr $P_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai.
D'autre part, $P_2\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vrai également.
- Supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vrais pour un entier $n \geq 2$ donné et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
On calcule $P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ grâce à la relation de récurrence entre P_{n+1} , P_n et P_{n-1} , puis on applique les hypothèses de récurrence :

$$\begin{aligned} P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_{n-1}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n-1}} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n+1}} - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}} \\ &= z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}, \end{aligned}$$

ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai, ce qui achève la preuve.

6. a. On remarque que $Q_1 = X^2 R_1(Y)$ en posant $R_1 = P_2 - 3P_1 + 4 = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et $Y = X + 1/X$. On en conclut par ce qui précède que z est racine de Q_1 si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est égal à 1 ou 2. On doit donc résoudre trois équations de la forme $z + \frac{1}{z} = \alpha$, qui sont du second degré : $z + \frac{1}{z} = \alpha \iff z^2 - \alpha z + 1 = 0$. Pour $\alpha = 1$, on obtient deux racines complexes $-j$ et $-j^2$ et pour $\alpha = 2$ une racine double : 1. On en conclut que $Q_1 = (X-1)^2(X^2 - X + 1)$.

b. On obtient de même que $Q_2 = X^3 R_2(Y)$ avec $R = 2 + P_3 + P_2 - 9P_1 = 2 + X^3 - 3X + X^2 - 2 - 9X = X^3 + X^2 - 12X = X(X^2 + X - 12)$ et $Y = X + 1/X$.

Les racines de R_2 sont donc 0 et les deux solutions de $X^2 + X - 12 = 0$, qui sont 3 et -4 .

- Pour $\alpha = 0$, l'équation $z^2 + 1 = 0$ admet les deux solutions complexes i et $-i$.
- Pour $\alpha = 3$, l'équation $z^2 - 3z + 1 = 0$ admet les deux solutions réelles $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
- Pour $\alpha = -4$, l'équation $z^2 + 4z + 1 = 0$ admet les deux solutions réelles $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$.

En conclusion Q_2 admet les 6 racines complexes suivantes :

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}, i, -i.$$

Ces six racines sont toutes simples car $\deg Q_2 = 6$, et comme le coefficient dominant de Q_2 est 1, la factorisation de Q_2 dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$Q_2 = \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) (X + 2 - \sqrt{3})(X + 2 + \sqrt{3})(X - i)(X + i).$$

On regroupe $(X - i)$ avec $(X + i)$ pour obtenir le polynôme à coefficients réels $X^2 + 1$, d'où la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) (X + 2 - \sqrt{3})(X + 2 + \sqrt{3})(X^2 + 1).$$

Solution 49

1. On calcule sans peine les premiers polynômes de cette suite :

$$P_1 = 2X, \quad P_2 = 4X, \quad P_3 = 2X^3 + 6X, \quad P_4 = 8X^3 + 8X.$$

2. On vérifie directement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (1-x)^n - (1+x)^n = -P_n(x).$$

3. On développe $(1+X)^n$ et $(1-X)^n$ par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (1+X)^n &= X^n + nX^{n-1} + \dots + nX + 1 \\ (1-X)^n &= (-1)^n X^n + n(-1)^{n-1} X^{n-1} + \dots - nX + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient de X^n dans P_n est $1 - (-1)^n$, tandis que celui de X^{n-1} est $n(1 - (-1)^{n-1})$. On en conclut que :

- si n est impair, le coefficient de X^n vaut $2 \neq 0$, et donc $\deg P_n = n$.
- si n est pair, le coefficient de X^n est nul, mais celui de X^{n-1} est $2n \neq 0$, donc $\deg P_n = n - 1$.

4. On vérifie que $P_n(0) = 1^n - 1^n = 0$: cela prouve que 0 est racine de P_n , ce qui est équivalent au fait que X divise P_n .

5. a. On remarque que 1 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(1) = 2^n \neq 0$, donc si on cherche à résoudre $P_n(z) = 0$, on peut supposer $z \neq 1$ et donc diviser par $(z-1)^n$: $P_n(z) = 0 \iff (1+z)^n = (1-z)^n \iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$.

b. D'après le cours, on sait que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k$, en posant $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Or $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k \iff z(1 + \omega_k) = \omega_k - 1$.

Il faut donc faire une discussion selon que $\omega_k = -1$ ou non :

- Si $\omega_k = -1$, l'équation $z(1 + \omega_k) = \omega_k - 1$ équivaut à $0 = -2$, et est donc impossible.

- Si $\omega_k \neq -1$, $z(1 + \omega_k) = \omega_k - 1 \iff z = \frac{\omega_k - 1}{1 + \omega_k}$.

En utilisant les techniques habituelles, cette dernière expression se simplifie en :

$$\frac{\omega_k - 1}{1 + \omega_k} = i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Or on sait que $\omega_k = -1$ est possible si et seulement si n est pair et $k = \frac{n}{2}$.

D'où la conclusion :

- Si n est impair, P_n admet les n racines $\left\{i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1\right\}$.
- Si n est pair, P_n admet les $n-1$ racines $\left\{i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1 \text{ et } k \neq \frac{n}{2}\right\}$.

Dans les deux cas on retrouve la racine réelle 0 en prenant $k = 0$ (on savait depuis la question 4 que 0 était racine), et c'est la seule racine réelle, puisque pour tout $0 < k \leq n-1$ tel que, de plus, $k \neq \frac{n}{2}$ dans le cas où n est pair, on a $\frac{k\pi}{n} \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, d'où $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$.

Donc pour tout $n \geq 1$, P_n admet une unique racine réelle.

6. Posons $z_k = i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour simplifier.

- **1er cas :** n est impair, c'est-à-dire de la forme $n = 2q + 1$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$.

Puisque P_n est de degré n et admet les n racines distinctes $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$, celles-ci sont toutes simples, et la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est -en n'oubliant pas le coefficient dominant qui vaut 2 (cf question 3) - est la suivante :

$$P_n = 2 \prod_{k=0}^{2q} (X - z_k).$$

On a vu que la seule racine réelle de P_n est $z_0 = 0$, donc, pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on met à part le terme $X - z_0 = X$, et on regroupe chaque autre racine z_k avec sa racine conjuguée $\overline{z_k} = -i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, puis on utilise la relation :

$$(X - z_k)(X - \overline{z_k}) = X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Grâce à la propriété $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$, on remarque que

$$\overline{z_k} = i \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = i \tan\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right) = z_{n-k}. \quad (1)$$

Ainsi on regroupe z_1 avec $z_{n-1} = z_{2q}$, z_2 avec z_{2q-1} et ainsi de suite jusqu'à z_q avec $z_{n-q} = z_{q+1}$, pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} P &= 2X \prod_{k=1}^q (X - z_k)(X - z_{n-k}) \\ &= 2X \prod_{k=1}^q \left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

- **2ème cas :** n est pair, c'est-à-dire de la forme $n = 2q$ pour un certain $q \geq 1$.

Ici P_n est de degré $n-1 = 2q-1$ et admet les $n-1$ racines $\{z_0, \dots, z_{q-1}, z_{q+1}, \dots, z_{n-1}\}$, qui sont donc toutes des racines simples. Comme le coefficient dominant est $2n = 4q$ (cf question 3), la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$P_n = 4q \prod_{k=0}^{q-1} (X - z_k) \prod_{k=q+1}^{2q-1} (X - z_k).$$

On regroupe à nouveau z_k avec z_{n-k} pour tout $1 \leq k \leq q-1$, d'où la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_n = 4qX \prod_{k=1}^{q-1} \left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Familles de polynômes

Solution 50

1. L'application ψ est linéaire puisque, pour tout réel a , l'évaluation $P \mapsto P(a)$ est linéaire.

- Puisque

$$\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1,$$

ψ est un isomorphisme si et seulement si ψ est injectif.

- Soit $P \in \text{Ker}(\psi)$. On a alors,

$$\forall k \leq n, P(a_k) = 0,$$

le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et admet $n + 1$ racines, il est donc nul. Ainsi le noyau de ψ est-il réduit à zéro.

2. Notons $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . La condition de l'énoncé est équivalente à

$$\forall i \leq n, \psi(L_i) = e_i.$$

L'application ψ étant un isomorphisme, ce système d'équations admet une unique solution donnée par,

$$\forall i \leq n, L_i = \psi^{-1}(e_i).$$

3. Essayons d'être efficaces !

- \mathcal{B} est l'image de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} par l'isomorphisme ψ^{-1} , il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille \mathcal{B} étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k.$$

Puisque

$$\forall 0 \leq j, i \leq n, L_j(a_i) = \delta_{i,j}.$$

on obtient facilement $\forall i \leq n$,

$$\alpha_i = P(a_i).$$

REMARQUE. Soient $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $n + 1$ points a_0, \dots, a_n du segment $[a, b]$. La recherche d'un polynôme P interpolant f aux points a_k , ie tel que

$$\forall k \leq n, P(a_k) = f(a_k),$$

débouche naturellement sur la définition et l'étude des polynômes interpolateurs de Lagrange : le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n f(a_k) L_k$$

est une solution évidente au problème. Voici par exemple, tracé en pointillé le graphe sur $[-\pi, \pi]$ du polynôme interpolateur du sinus aux points $\pm\pi, 0$ et $\pm\frac{\pi}{2}$.

4. Les polynômes définis pour tout $i \leq n$ par

$$\Lambda_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - \alpha_j}{a_i - \alpha_j} \right) \in \mathbb{R}_n[X]$$

vérifient

$$\forall 0 \leq j, i \leq n, \Lambda_j(a_i) = \delta_{i,j},$$

donc d'après la question 2., pour tout $i \leq n$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - \alpha_j}{a_i - \alpha_j} \right).$$

Solution 51

1. Tout d'abord les L_i sont bien de degré inférieur ou égal à n (ils sont même de degré n exactement). De plus, $L_i(x_j)$ vaut 1 si $j = i$ et 0 sinon. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ n réels tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$. En évaluant en chacun des x_i , on trouve $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi la famille (L_0, \dots, L_n) est libre. Elle comporte $n + 1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On a $P(x_i) = x_i^k$ pour $0 \leq i \leq n$. Le polynôme $P - X^k$ admet donc au moins $n + 1$ racines distinctes et $\deg(P - X^k) \leq n$. Donc $P - X^k$ est nul i.e. $P = X^k$.

Solution 52

1. On trouve $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ et $P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.
2. On a $\deg Q_n = n \deg(X^2 - 1) = 2n$. Ainsi $\deg P_n = \deg Q_n - n = n$.
3. Comme Q_n est pair, sa dérivée $n^{\text{ème}}$ P_n est paire si n est pair et impaire si n est impair.
Si n est impair, P_n est impair : on a donc $P_n(0) = 0$.
Si n est pair, P_n est pair donc P_n' est impair : on a donc $P_n'(0) = 0$.
4. Via la formule du binôme

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

La formule de Taylor en 0 donne également

$$Q_n = \sum_{l=0}^{2n} \frac{Q_n^{(l)}(0)}{l!} X^l$$

Supposons n pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. En identifiant les coefficients de X^n dans ces deux expressions, on obtient

$$\frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \binom{2p}{p} (-1)^p$$

puis

$$P_n(0) = \frac{(-1)^p \binom{2p}{p}}{2^{2p}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

Supposons n impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. En identifiant les coefficients de X^{n+1} dans les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{Q^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \binom{2p+1}{p+1} (-1)^p$$

puis

$$P_n'(0) = \frac{(2p+2)(-1)^p \binom{2p+1}{p+1}}{2^{2p+1}} = \frac{(-1)^p (2p+1)!}{2^{2p} (p!)^2}$$

5.
 - a. Pour $n \geq 1$, on a $Q_n' = 2nX(X^2 - 1)^{n-1}$ et donc $(X^2 - 1)Q_n' = 2nX(X^2 - 1)^n = 2nXQ_n$. On vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ puisque $Q_0 = 1$.
 - b. On utilise la formule de Leibniz. Comme les dérivées de $X^2 - 1$ sont nulles à partir de l'ordre 3 et que celles de X sont nulles à partir de l'ordre 2, on a

$$\binom{n+1}{0} (X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2 \binom{n+1}{1} XQ_n^{(n+1)} + 2 \binom{n+1}{2} Q_n^{(n)} = 2n \binom{n+1}{0} XQ_n^{(n+1)} + 2n \binom{n+1}{1} Q_n^{(n)}$$

Autrement dit

$$(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2(n+1)XQ_n^{(n+1)} + n(n+1)Q_n^{(n)} = 2nXQ_n^{(n+1)} + 2n(n+1)Q_n^{(n)}$$

ou encore

$$(X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + 2XQ_n^{(n+1)} = n(n+1)Q_n^{(n)}$$

Par définition de P_n , on a donc

$$(X^2 - 1)P_n'' + 2XP_n' = n(n+1)P_n$$

6. a. $Q_n = (X-1)^n(X+1)^n$ ce qui prouve que 1 et -1 sont des racines de Q_n de multiplicité n . On a donc $Q_n^{(k)}(\pm 1) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

b. On fait l'hypothèse de récurrence $HR(k)$ suivante :

$Q_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$

$HR(0)$ est vraie puisque les seules racines de Q_n sont -1 et 1 (pas de racine du tout si $n = 0$).

Supposons que $HR(k)$ soit vraie pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Posons $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{k+1} = 1$ et α_i pour $1 \leq i \leq k$ k racines distinctes de $Q_n^{(k)}$ dans l'intervalle $] -1, 1[$ rangées dans l'ordre croissant. D'après la question précédente, $Q_n^{(k)}$ s'annule en α_0 et α_{k+1} . De plus, $Q_n^{(k)}$ s'annule en les α_i pour $1 \leq i \leq k$. Comme Q_n est dérivable et continue sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Rolle entre α_i et α_{i+1} pour $0 \leq i \leq k$. Ceci prouve que la dérivée de $Q_n^{(k)}$, à savoir $Q_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois.

Par récurrence finie, $Q_n^{(n)}$ et donc P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $] -1, 1[$. Comme $\deg P_n = n$, P_n possède au plus n racines réelles. On en déduit que P_n possède exactement n racines réelles toutes situées dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Solution 53

On montre par récurrence sur n que la famille $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

La famille (1) est bien libre puisque 1 est non nul.

Supposons avoir prouvé que la famille $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n+1-k}$. En évaluant en a , on trouve $\lambda_{n+1}(a-b)^{n+1} = 0$ et donc $\lambda_{n+1} = 0$ puisque $a \neq b$. On en déduit $(X-b)^{n+1} \sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0$.

Par intégrité de $\mathbb{K}[X]$, on a $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0$. Or la famille $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre par hypothèse de récurrence. Ainsi $\lambda_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Finalement la famille $((X-a)^k(X-b)^{n+1-k})_{0 \leq k \leq n+1}$ est libre.

Par récurrence, $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est donc une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. Or $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ donc, cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Applications linéaires et polynômes

Solution 54

L'application f est clairement un endomorphisme de E . Soit $P \in E$. Posons $Q = f(P)$. Pour tout entier $k \leq n$,

$$Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)},$$

ainsi, par télescope,

$$\sum_{k=0}^n Q^{(k)} = P^{(0)} - P^{(n+1)}.$$

Et puisque $\deg(P) \leq n$, $P^{(n+1)} = 0$. On a donc

$$P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)},$$

ce qui prouve que f est un isomorphisme d'inverse

$$f^{-1} : Q \mapsto \sum_{k=0}^n Q^{(k)}.$$

Solution 55

1. L'application ϕ est clairement linéaire. On a, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned}\phi(X^k) &= (X+1)X^k - X(X+1)^k \\ &= X^{k+1} + X^k - X \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \\ &= (1-k)X^k - \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^{i+1}\end{aligned}$$

avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$. Ainsi

$$\forall k \leq n, \phi(X^k) \in E_n$$

ainsi $\phi \in \mathcal{L}(E_n)$.

2. Un polynôme P de E_n appartient à $\text{Ker}(\phi)$ si et seulement si

$$XP(X+1) = (X+1)P(X).$$

En particulier, $P(0) = 0$ donc P est de la forme $P = XQ$ avec

$$X(X+1)Q(X+1) = (X+1)XQ,$$

i.e. $Q(X+1) = Q(X)$, ce qui équivaut à Q constant. Ainsi :

$$\text{Ker}(\phi) = \text{vect}(X).$$

3. Comme ϕ est un endomorphisme non injectif (car son noyau est non nul, voir la question précédente) du \mathbb{K} -ev E_n de dimension finie, ϕ n'est pas surjectif.

Solution 56

1. Puisque $\deg U_p = p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2. On constate que $\Delta U_0 = 0$. Pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\Delta U_p &= \frac{(X+1)X \dots (X-p+2)}{p!} - \frac{X(X-1) \dots (X-p+1)}{p!} \\ &= \frac{X(X-1) \dots (X-p+2) [(X+1) - (X-p+1)]}{p!} \\ &= \frac{X(X-1) \dots (X-p+2)}{(p-1)!} = U_{p-1}\end{aligned}$$

Par une récurrence évidente, on a donc $\Delta^n U_p = U_{p-n}$ si $n \leq p$ et $\Delta^n U_p = U_{p-n}$ si $n > p$.

3. Il suffit de vérifier que la formule est vraie pour les éléments de la base (U_p) . Remarquons tout d'abord que, pour $p \geq 1$, $U_p(0) = 0$. Le polynôme U_n est de degré n et pour $k < n$, $\Delta^k(U_n) = U_{n-k}$ et $U_{n-k}(0) = 0$ car $n-k \geq 1$. Par ailleurs, $\Delta^n(U_n) = U_0 = 1$. La formule est donc vraie pour tous les U_n et, ceux-ci formant une base, elle est vraie pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

4. Montrons tout d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Soit donc $p \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leq k \leq p-1$, $U_p(k) = 0$. Pour $k \geq p$, $U_p(k) = \binom{k}{p}$. Enfin pour $k < 0$,

$$\begin{aligned}U_p(k) &= \frac{k(k-1) \dots (k-p+1)}{p!} \\ &= (-1)^p \frac{(-k)(-k+1) \dots (-k+p-1)}{p!} \\ &= \binom{-k+p-1}{p}\end{aligned}$$

Ainsi $U_p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et si les composantes d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ dans la base (U_p) sont entières, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. On écrit P sous la forme $P = \sum_{p=0}^n \lambda_p U_p$. Alors $P(0) = \lambda_0$ donc $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$.

Soit $1 \leq k \leq n$. Supposons avoir prouvé que $\lambda_p \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leq p \leq k-1$. Comme $U_p(k) = 0$ pour $p > k$ et que $U_k(k) = 1$, on a $P(k) = \sum_{p=0}^{k-1} \lambda_p U_p(k) + \lambda_k$. Ainsi $\lambda_k \in \mathbb{Z}$. Par récurrence finie, on montre donc que tous les λ_p sont entiers.

5. Si f est polynomiale, notons n son degré. En utilisant par exemple la formule donnant la décomposition de f dans la base (U_p) , on obtient $\Delta^{n+1} f = 0$.

Pour la réciproque, prouvons d'abord un lemme préliminaire. Notons encore Δ l'endomorphisme de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ qui à f associe $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et montrons que $\text{Ker } \Delta$ est formé des fonctions constantes. Soit $f \in \text{Ker } \Delta$. Par récurrence, on a donc $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Démontrons maintenant un deuxième lemme. Soit $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $\Delta f = P$ et montrons qu'alors f est polynomiale. On peut écrire $P = \sum_{p=0}^n \lambda_p U_p$. Posons $Q = \sum_{p=0}^n \lambda_p U_{p+1}$. On a alors $\Delta(f - Q) = 0$ donc f et Q diffèrent d'une constante et f est polynomiale.

Par une récurrence descendante finie sur k , on prouve que $\Delta^k f$ est polynomiale pour k variant de n à 0. Pour $k = 0$, on obtient le résultat voulu.

Solution 57

1. Prouvons que l'application φ_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel E_n .

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $W = \varphi_n(\lambda P + Q)$. On a alors,

$$\begin{aligned} W &= (X-a)((\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q)(a)) \\ &\quad - 2((\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)(a)) \\ &\quad \text{(par définition de } \varphi_n) \\ &= (X-a)(\lambda P' + Q' + \lambda P(a) + Q(a)) \\ &\quad - 2(\lambda P + Q - \lambda P(a) - Q(a)) \\ &\quad \text{(par linéarité de la dérivation et de l'évaluation)} \\ &= \lambda((X-a)(P' + P(a)) - 2(P - P(a))) \\ &\quad + ((X-a)(Q' + Q(a)) - 2(Q - Q(a))) \\ &\quad \text{(cf. calculs dans l'algèbre } \mathbb{R}[X]) \\ &= \lambda \varphi_n(P) + \varphi_n(Q) \\ &\quad \text{(par définition de } \varphi_n) \end{aligned}$$

- Il reste à vérifier que E_n est stable par φ_n , c'est-à-dire que $\varphi_n(E_n) \subset E_n$. Soit $P \in E_n$. On a alors

$$\deg((X-a)(P' + P(a))) \leq n$$

et $\deg(-2(P - P(a))) \leq n$, donc

$$\deg(\varphi_n(P)) \leq n$$

et ainsi $\varphi_n(P) \in E_n$.

2. La famille (P_0, \dots, P_n) est étagée en degré, il s'agit donc d'une famille libre de E_n . Puisqu'elle comporte

$$n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

vecteurs, c'est une base de E_n .

3. On a clairement $\varphi(P_0) = \varphi(P_1) = \varphi(P_2) = 0$. De plus, pour tout $k \geq 3$,

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= (X-a)k(X-a)^{k-1} - 2(X-a)^k \\ &= (k-2)(X-a)^k = (k-2)P_k \end{aligned}$$

4. Ainsi ,

$$\text{Im}(\varphi_n) = \text{vect}(\varphi(P_0), \dots, \varphi(P_n)) = \text{vect}(P_3, \dots, P_n)$$

et $\text{rg}(\varphi_n) = n - 2$. De plus

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{vect}(P_0, P_1, P_2) \subset \text{Ker}(\varphi_n)$$

et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_n)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]).$$

On a donc $\text{Ker}(\varphi_n) = \mathbb{R}_2[X]$.

5. On a

$$\text{Ker}(\varphi_n) = \text{vect}(P_0, P_1, P_2)$$

et

$$\text{Im}(\varphi_n) = \text{vect}(P_3, \dots, P_n)$$

et puisque (P_0, \dots, P_n) est une base de E_n ,

$$E_n = \text{Im}(\varphi_n) \oplus \text{Ker}(\varphi_n).$$

6. Etant un endomorphisme de E_n , φ_n est un projecteur si et seulement si

$$\varphi_n \circ \varphi_n = \varphi_n.$$

C'est-à-dire,

$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = (\varphi_n \circ \varphi_n)(P)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall 0 \leq k \leq n, \varphi(P_k) = (\varphi \circ \varphi)(P_k).$$

D'après les calculs entrepris à la question 2.,

$$\forall 0 \leq k \leq 2, \varphi(P_k) = (\varphi \circ \varphi)(P_k) = 0,$$

et

$$\varphi(P_3) = P_3 = (\varphi \circ \varphi)(P_3).$$

De plus, $\forall k \geq 4$,

$$\varphi(P_k) = (k-2)P_k \neq (\varphi \circ \varphi)(P_k) = (k-2)^2 P_k$$

car $(k-2)^2 \neq k-2$ et $P_k \neq 0$. L'endomorphisme φ_n est donc un projecteur si et seulement si $n = 3$.

Solution 58

1. On a clairement $\varphi(1) = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= \frac{X^k + (X+1)^k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(X^k + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} X^l \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(X^k + X^k + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l \right) \\ &= X^k + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(\varphi(X^k)) = k$ et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ vaut 1.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \frac{(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X+1)}{2} = \frac{\lambda P(X) + \mu Q(X) + \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)}{2}$$

par linéarité de la composition. Ainsi,

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \frac{P(X) + P(X+1)}{2} + \mu \frac{Q(X) + Q(X+1)}{2} = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

L'application φ est donc linéaire.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, $(\varphi(1), \dots, \varphi(X^n))$ est bien une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés étagés (et donc libre) d'après la première question. Puisqu'elle comporte $n+1$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il s'ensuit que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ par φ est une base de $\mathbb{R}[X]$, ce qui prouve que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4. Étude d'une suite de polynômes.

a. U_n est l'unique antécédent de $\frac{X^n}{n!}$ par la bijection φ .

b. Il est clair que $U_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $U_n(X+1) + U_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$, on obtient après évaluation en 0, $U_n(1) + U_n(0) = 0$.

En dérivant l'égalité polynomiale précédente, on aboutit à,

$$U'_n(X+1) + U'_n(X) = \frac{2nX^{n-1}}{n!} = \frac{2X^{n-1}}{(n-1)!} = U_{n-1}(X+1) + U_{n-1}(X)$$

ou encore $\varphi(U'_n) = \varphi(U_{n-1})$. Par injectivité de φ , $U'_n = U_{n-1}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\varphi(V_n) = \frac{(-1)^n(U_n(1-X) + U_n(1-(X+1)))}{2} = \frac{(-1)^n(U_n(1-X) + U_n(-X))}{2} = (-1)^n \frac{(-X)^n}{n!} = \frac{X^n}{n!} = \varphi(U_n)$$

Par injectivité de φ , $V_n = U_n$ i.e. $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$.

Equations d'inconnue polynomiale

Solution 59

- Le polynôme nul est une solution évidente de l'équation.
- Soit P une solution non nulle de l'équation. Notons $d \geq 0$ son degré. Puisque $P(X^2)$ est de degré $2d$ et $(X^2+1)P$, on a *nécessairement*

$$2d = d + 2,$$

ie $d = 2$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Après tout calcul, P est solution si et seulement si

$$b = 0, \quad c = -a.$$

En notant $\Gamma = X^2 - 1$, l'ensemble des solutions est la droite vectorielle

$$\text{vect}(\Gamma).$$

Solution 60

Soit P un tel polynôme et $Q = P - P(0)$. On prouve sans peine que $Q(X+1) = Q(X)$ et $Q(0) = 0$. On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines : $Q = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, il est clair qu'un polynôme P constant vérifie $P(X+1) = P(X)$.

Solution 61

- Il est clair que le seul polynôme constant solution de l'équation est le polynôme nul.
- Soit P une solution non constante de l'équation. Notons d son degré. Puisque $(P')^2$ est de degré $2d - 2$ et $4P$ de degré d , on a *nécessairement*

$$2d - 2 = d,$$

c'est-à-dire $d = 2$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Après tout calcul, P est solution si et seulement si

$$a^2 = a, \quad ab = b, \quad 4c = b^2.$$

C'est-à-dire

$$a = b = 0 = c$$

ou

$$a = 1.$$

- Les solutions sont donc le polynôme nul et ceux de la forme

$$X^2 + bX + \frac{b^2}{4}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Solution 62

1. a. Soit $d \in \mathbb{N}$, le degré de P :

$$P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0.$$

Alors le degré de XP est égal à $d + 1$ et le degré de $P(X^2)$ à $2d$:

$$P(X^2) = a_d X^{2d} + \dots + a_1 X^2 + a_0.$$

Par conséquent, $2d = d + 1$, donc $d = 1$. Le polynôme P possède donc une unique racine complexe.

- b. En substituant 0 à X , on trouve $P(0) = 0$, ce qui montre que 0 est la racine de P , donc il existe un réel α (non nul) tel que $P = \alpha X$.

2. Tout polynôme de la forme αX , avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (éventuellement nul), convient à l'évidence. D'après la première question, il n'y a pas d'autre solution.

REMARQUE. Il faut acquérir le réflexe d'étudier spontanément le degré, le coefficient dominant, les racines d'un polynôme vérifiant une telle équation : c'est ainsi qu'on trouvera (en général...) assez de conditions nécessaires pour caractériser les solutions.

Solution 63

- Le polynôme nul est clairement solution.
- Il n'y a pas de solution de degré zéro ou un.
- Recherchons le degré n d'une éventuelle solution non nulle P de l'équation. D'après ce qui précède, on peut supposer $n \geq 2$. Comme le degré de $P'P''$ vaut $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$, l'équation $P'P'' = 18P$ impose

$$2n - 3 = n,$$

ie $n = 3$.

Soit

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad \text{avec } a \neq 0.$$

P est solution de $P'P'' = 18P$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 18aX^3 + 18bX^2 + 18cX + 18d &= (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) \\ &= (18a^2)X^3 + (18ab)X^2 + (4b^2 + 6ac)X + (2bc) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} 18a = 18a^2 \\ 18b = 18ab \\ 18c = 4b^2 + 6ac \\ 18d = 2bc \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, on en déduit que ce système équivaut à

$$c = \frac{b^2}{3}, \quad d = \frac{b^3}{27}.$$

Les solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes P de la forme

$$P = X^3 + bX^2 + \frac{b^2}{3}X + \frac{b^3}{27}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Solution 64

1. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $\Phi(P) = P(X+1) + P(X)$. Il est clair que $\deg \Phi(X^n) = n$. L'image de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme. Le polynôme X^n admet donc un unique antécédent P_n par Φ qui vérifie donc la condition de l'énoncé.
2. Si on dérive la relation $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$, on obtient $P'_n(X+1) + P'_n(X) = 2nX^{n-1}$. De plus, $P_{n-1}(X+1) + P_{n-1}(X) = X^{n-1}$. Par conséquent, $\Phi(P'_n) = \Phi(nP_{n-1})$. Comme Φ est injectif, $P'_n = nP_{n-1}$.
3. La famille $(2X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. La famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est l'image réciproque de cette base par l'isomorphisme Φ , c'est donc aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.
4. On a $\Phi(P_n) = 2X^n$ donc $\Phi(P_n(X+1)) = 2(X+1)^n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi(P_n(X+1)) &= \sum_{k=0}^n 2 \binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi(P_k) \\ &= \Phi\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k\right) \end{aligned}$$

Comme Φ est un isomorphisme, on en déduit :

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$$

5. Posons $Q_n(X) = P_n(1-X)$. Alors

$$\Phi(Q_n) = Q_n(X+1) + Q_n(X) = P_n(-X) + P_n(1-X)$$

Par ailleurs, en substituant $-X$ à X dans la relation

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$

on obtient :

$$P_n(1-X) + P_n(-X) = 2(-1)^n X^n = (-1)^n \Phi(P_n)$$

Comme Φ est injectif, on a donc $Q_n = (-1)^n P_n$ i.e. $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Solution 65

Soit P un tel polynôme. En substituant 0 à X dans la condition de l'énoncé, on trouve $P(0) = 0$. Puis en substituant -1 à X , on trouve $P(-1) = 0$. En substituant -2 à X , on trouve $P(-2) = 0$. Enfin, en substituant -3 à X , on trouve $P(-3) = 0$. On ne peut pas aller plus loin. Ainsi P est divisible par $X(X+1)(X+2)(X+3)$. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$. La condition de l'énoncé donne $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)$ et donc $Q(X) = Q(X+1)$ par intégrité de $\mathbb{R}[X]$. On montre par récurrence que tout entier naturel est racine de $Q - Q(0)$ donc Q est constant. Ainsi P est de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement tout polynôme de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie bien la condition de l'énoncé.

Solution 66

1. Soit a une racine de P . Alors $P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$ i.e. a^2 est une racine de P . On peut alors montrer par récurrence que a^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comme P est non nul, il possède un nombre fini de racines. Comme \mathbb{N} est infini, l'application $n \mapsto a^{2^n}$ ne peut être injective. Il existe donc des entiers m et n tels que $a^{2^m} = a^{2^n}$. Supposons $m > n$. Comme a est non nul, on peut diviser l'égalité précédente par a^{2^n} ce qui donne $a^{2^m - 2^n} = 1$ avec $2^m - 2^n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi a est une racine de l'unité.
3. On va montrer que P peut admettre une racine nulle. Supposons que P admette une racine nulle. En substituant -1 à X dans l'identité $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, on voit que 1 est également racine de P . Donc P est divisible par $X(X-1)$. Tentons notre chance avec ce polynôme : prenons $P = X(X-1)$. On a bien $P(X^2) = P(X+1)P(X)$ et pourtant 0 est racine de P donc P n'admet pas pour racine que des racines de l'unité.
4. Supposons que P admette une racine ω non nulle et distincte de 1 . On sait que $|\omega| = 1$. Mais $P((\omega-1)^2) = P(\omega)P(\omega-1) = 0$ donc $(\omega-1)^2$ est aussi une racine de P . On a donc soit $(\omega-1)^2 = 0$ i.e. $\omega = 1$, ce qui est exclu, soit $|(\omega-1)^2| = 1$ i.e. $|\omega-1| = 1$. Le point d'affixe ω est donc sur le cercle unité et sur le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1 . Des considérations élémentaires de géométries montrent que $\omega = e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$. Mais alors ω^2 est également une racine de P non nulle et distincte de 1 et pourtant $\omega^2 \neq e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$. C'est que notre hypothèse de départ était fausse.
5. Le polynôme nul vérifie évidemment la condition demandée. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. D'après ce qui précède, les seules racines possibles de P sont 0 et 1 . P est donc de la forme $P = \lambda X^n(X-1)^p$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n, p \in \mathbb{N}$. Alors $P(X^2) = \lambda X^{2n}(X^2-1)^p = \lambda X^{2n}(X-1)^p(X+1)^p$ et $P(X)P(X+1) = \lambda^2 X^{n+p}(X-1)^p(X+1)^n$. L'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles montre que $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda = 1$ et que $p = n$. P est donc de la forme $P = X^n(X-1)^n$. Réciproquement, soit $P = X^n(X-1)^n$. On vérifie que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. En conclusion, les seuls polynômes vérifiant la condition demandée sont le polynôme nul et les polynômes du type $X^n(X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution 67

1. Supposons que 0 soit racine de P . Remarquons que si a est racine de P , alors $(a+1)^2$ l'est également. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$. On montre par récurrence que $P(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre également par récurrence que les termes de u_n appartiennent à \mathbb{R}_+ . On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1 > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante : elle prend donc une infinité de valeurs. Ceci prouve que P admet une infinité de racines donc P est nul, ce qui est contradictoire avec l'énoncé.
2. Remarquons maintenant que si a est racine de P , alors a^2 l'est également. On peut alors montrer par récurrence que a^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme P est non nul, il possède un nombre fini de racines. Comme \mathbb{N} est infini, l'application $n \mapsto a^{2^n}$ ne peut être injective. Il existe donc des entiers m et n tels que $a^{2^m} = a^{2^n}$. Supposons $m > n$. Comme a est non nul d'après la question précédente, on peut diviser l'égalité précédente par a^{2^n} ce qui donne $a^{2^m - 2^n} = 1$ avec $2^m - 2^n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi a est une racine de l'unité et est donc de module 1 .
3. On suppose encore P non nul. Soit a une racine éventuelle de P . On a vu que $|a| = 1$. Alors $(a+1)^2$ est également une racine de P donc $|(a+1)^2| = 1$ i.e. $|a+1| = 1$. Le point d'affixe a est donc sur le cercle unité et sur le cercle de centre le point d'affixe -1 et de

rayon 1. Des considérations élémentaires de géométries montrent que $a = j$ ou $a = j^2$. P est donc de la forme $\lambda(X - j)^n(X - j^2)^p$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n, p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} P(X^2) &= \lambda(X^2 - j)^n(X^2 - j^2)^p = \lambda(X^2 - j^4)^n(X^2 - j^2)^p = \lambda(X - j^2)^n(X + j^2)^n(X - j)^p(X + j)^p \\ P(X)P(X - 1) &= \lambda^2(X - j)^n(X - j^2)^p(X - 1 - j)^n(X - 1 - j^2)^p = \lambda^2(X - j)^n(X - j^2)^p(X + j^2)^n(X + j)^p \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on obtient $\lambda = \lambda^2$ i.e. $\lambda = 1$ et $n = p$. P est donc de la forme $P = (X - j)^n(X - j^2)^n = (X^2 + X + 1)^n$.

Réciproquement, soit $P = (X^2 + X + 1)^n$. On vérifie que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

En conclusion, les seuls polynômes vérifiant la condition demandée sont le polynôme nul et les polynômes du type $(X^2 + X + 1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution 68

Soit P un polynôme vérifiant la condition de l'énoncé. Si P est constant, P est nécessairement nul. Si P est non constant, notons n son degré et a son coefficient dominant. Les polynômes P et X^2P' ont même degré et leurs coefficients dominants sont respectivement $6a$ et $n(n - 1)a$. Comme $a \neq 0$, $n(n - 1) = 6$ et donc $n = 3$. Comme X^2 divise P , P est de la forme $aX^3 + bX^2$. En reportant dans l'équation, on obtient $6aX^3 + 6bX^2 = 6aX^3 + 2bX^2$ et donc $b = 0$. Dans les deux cas, P est de la forme aX^3 (avec éventuellement $a = 0$ pour retrouver le polynôme nul).

Réciproquement, on vérifie que les polynômes aX^3 avec $a \in \mathbb{K}$ conviennent.

On en déduit que l'ensemble des polynômes recherchés est $\text{vect}(X^3)$.

Solution 69

1. a. Supposons α racine de P .

Alors $a_0 = \alpha$ est racine de P . Supposons a_n racine de P pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 2a_n) = P((a_n + 1)^2 - 1) = P(a_n)P(a_n + 2) = 0$$

Ainsi a_{n+1} est racine de P .

Par récurrence, a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b. On montre par récurrence que (a_n) est une suite strictement positive. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0$ donc (a_n) est strictement croissante.
- c. Si $\alpha > 0$ est racine de P , la suite (a_n) est strictement croissante et prend donc une infinité de valeurs. Ainsi P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait que P est non nul. P ne peut admettre de racines strictement positives.
2. a. Supposons que -1 est racine. Alors

$$P(3) = P((-2)^2 - 1) = P(-3)P(-1) = 0$$

Mais 3 ne peut être racine de P puisque P n'admet pas de racines strictement positives.

- b. On a $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$. On montre alors par récurrence que $a_n + 1 = (\alpha + 1)^{2^n}$.
- c. Si $|\alpha + 1| = 0$ ou $|\alpha + 1| = 1$, la suite (r_n) est constante. Si $0 < |\alpha + 1| < 1$, la suite (r_n) est strictement décroissante. Si $|\alpha + 1| > 1$, la suite (r_n) est strictement croissante. Ainsi la suite (r_n) est strictement monotone si et seulement si $|\alpha + 1| \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- d. Supposons α racine de P .
Si $|\alpha + 1| \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite (r_n) est strictement monotone donc injective. A fortiori, la suite (a_n) l'est également. Comme a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$, P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait que P est non nul.
De plus, on ne peut avoir $|\alpha + 1| = 0$ puisque -1 n'est pas racine de P .
C'est donc que $|\alpha + 1| = 1$.
- e. Supposons α racine de P . Alors $P((\alpha - 1)^2 - 1) = P(\alpha - 2)P(\alpha) = 0$. Ainsi $\alpha^2 - 2\alpha$ est racine de P . D'après la question précédente, $|\alpha^2 - 2\alpha + 1| = 1$ ou encore $|(\alpha - 1)^2| = 1$. On en déduit que $|\alpha - 1| = 1$.

3. Si P est non constant, P admet au moins une racine. Notons à nouveau α une racine de P . D'après ce qui précède, $|\alpha - 1| = |\alpha + 1| = 1$. Le point d'affixe α est donc sur les cercles de rayon 1 et de centres respectifs les points d'affixe -1 et 1 . Ainsi $\alpha = 0$. La seule racine de P est donc 0.

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation (*).

Si P est constant, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda$. La relation (*) implique $\lambda = \lambda^2$ i.e. $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Si P est non constant, ce qui précède montre que P admet 0 pour unique racine. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = \lambda X^n$. En raisonnant sur les coefficients dominants dans la relation (*), on a nécessairement $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda = 1$ puisque $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Ainsi $P = X^n$. Réciproquement, on constate que le polynôme nul et les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$ (on retrouve le polynôme 1 pour $n = 0$) vérifient bien la relation (*).

Les polynômes recherchés sont donc exactement le polynôme nul et les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Divers

Solution 70

Si $n = 0$, on prend P quelconque. Si $n = 1$, on prend $P = 1$. On suppose maintenant $n \geq 2$.

Notons $P(x)$ la partie régulière du développement limité à l'ordre $n - 1$ de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. P est donc un polynôme et $\sqrt{1+x} = P(x) + o(x^{n-1})$. Comme $P = \mathcal{O}(1)$, on a donc également $1+x = P(x)^2 + o(x^{n-1})$. Effectuons la division euclidienne de P^2 par X^n : il existe deux polynômes Q et R tels que $P^2 = X^n Q + R$ avec $\deg R < n$. On a alors $1+x = R(x) + x^n Q(x) + o(x^{n-1}) = R(x) + o(x^{n-1})$. Par unicité du développement limité, on a $1+X = R$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $n \geq 2$). Donc $1+X = P^2 - X^n Q$. Ainsi X^n divise $1+X - P^2$.

Solution 71

Comme $\deg P \leq n$, $P^{(n+1)} = 0$. On en déduit que $P = Q - Q'$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) - Q(x) \leq 0$. L'idée est alors de comparer Q à une solution de $y' - y = 0$ à savoir $x \mapsto e^{-x}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q'(x)e^{-x} - Q(x)e^{-x} \leq 0$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q(a) < 0$. Soit alors $t \geq a$. Puisque $x \mapsto Q'(x)e^{-x} - Q(x)e^{-x}$ est la dérivée de $x \mapsto Q(x)e^{-x}$, on obtient en intégrant l'inéquation différentielle entre a et t : $Q(t)e^{-t} - Q(a)e^{-a} \leq 0$ ou encore $Q(t) \leq Q(a)e^{t-a}$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q = -\infty$. Or $P \sim Q$ puisque $P', P'', \dots, P^{(n)}$ sont de degrés strictement inférieurs à P . On en conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P = -\infty$, ce qui contredit le fait que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 72

Puisque le coefficient du monôme de degré n du polynôme P est $\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$, un polynôme P est de la forme donnée dans l'énoncé si et seulement si $(-1)^n P^{(n)}(0) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient donc P et Q deux polynômes de la forme donnée dans l'énoncé. On a donc $(-1)^n P^{(n)}(0) \geq 0$ et $(-1)^n Q^{(n)}(0) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Leibniz

$$(-1)^n (PQ)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k P^{(k)}(0) (-1)^{(n-k)} Q^{(n-k)}(0) \geq 0$$

Solution 73

On a $(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ et $(1-X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^k$ par la formule du binôme de Newton. Le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1-X)^n$ est donc

$$\sum_{p+q=n} \binom{n}{p} (-1)^q \binom{n}{q} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux pour la dernière égalité.

Mais comme $(1+X)^n(1-X)^n = (1-X^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^{2k}$, on en déduit que ce coefficient vaut 0 si n est impair et $(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n est pair.

REMARQUE. On aurait pu montrer directement la nullité de la somme de l'énoncé dans le cas où n est impair en effectuant le changement d'indice $l = n - k$ et en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux.

Solution 74

1. Soit P un tel polynôme. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$. Les polynômes P et \overline{P} coïncident sur \mathbb{R} qui est infini donc ils sont égaux. Ainsi $P = \overline{P}$ i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.

Réciproquement tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2. Soit P un tel polynôme. P est forcément non nul : notons $n = \deg P$. Alors pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)\overline{P(z)} = 1$ ou encore $P(z)\overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$. On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)z^n\overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} = z^n$. Posons $Q = X^n\overline{P\left(\frac{1}{X}\right)}$. Q est bien un polynôme et pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z)Q(z) = z^n$. Comme \mathbb{U} est infini, $PQ = X^n$. Ainsi P divise X^n et $\deg P = n$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda X^n$. Mais la condition $P(\mathbb{U}) \subset (\mathbb{U})$ impose alors $\lambda \in \mathbb{U}$.

Réciproquement, tout polynôme de la forme λX^n avec $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ convient.

3. Soit P un tel polynôme et posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec a_0, \dots, a_n dans \mathbb{C} a priori. Soient x_0, \dots, x_n des rationnels distincts deux à deux. Posons $y_k = P(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Notons $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $M = (x_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$. Ainsi $MA = Y$. M est une matrice de

Vandermonde inversible puisque les x_k sont distincts deux à deux. Comme M est à coefficients dans \mathbb{Q} , M^{-1} l'est également. Enfin, Y est aussi à coefficients dans \mathbb{Q} par hypothèse et finalement $A = M^{-1}Y$ est à coefficients rationnels. Ainsi $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Réciproquement tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ convient évidemment.

REMARQUE. La preuve qui précède est valable pour tout sous-corps de \mathbb{C} (et pas seulement pour \mathbb{Q}). En effet, tout sous-corps de \mathbb{C} contient \mathbb{Q} et est donc infini : on peut toujours trouver $n + 1$ scalaires x_0, \dots, x_n distincts deux à deux dans ce sous-corps quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Solution 75

Supposons que ce soit le cas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(0) = \cos^{(n)}(0)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(2n)}(0) = \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \neq 0$. Ceci est impossible puisque pour $2n > \deg P$, $P^{(2n)} = 0$.

Solution 76

1. Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On a $\text{val } P = \min A$ et $\deg P = \max A$ donc $\text{val } P \leq \deg P$.

2. Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Pour $n < \text{val } P$, $a_n = 0$ et pour $n < \text{val } Q$, $b_n = 0$. Ainsi pour $n < \min(\text{val } P, \text{val } Q)$, $a_n + b_n = 0$. Ceci montre que $\text{val}(P + Q) \geq \min(\text{val } P, \text{val } Q)$. En prenant $P = 1 + X$ et $Q = -1$, on a $\text{val } P = \text{val } Q = 0$. Or $P + Q = X$ donc $\text{val}(P + Q) = 1$. On a bien $\text{val}(P + Q) > \min(\text{val } P, \text{val } Q)$.

3. Soient $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Posons $p = \text{val } P$ et $q = \text{val } Q$. On a donc $a_n = 0$ pour $n < p$ et $a_p \neq 0$, de même que $b_n = 0$ pour $n < q$ et $b_q \neq 0$.

Posons $PQ = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$. D'abord

$$c_{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = a_p b_q$$

car pour $k < p$, $a_k = 0$ et pour $k > p$, $b_{p+q-k} = 0$. Ensuite pour $n < p + q$,

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$$

car pour $k < p$, $a_k = 0$ et pour $k \geq p$, $b_{n-k} = 0$. On en déduit que $\text{val}(P + Q) = p + q = \text{val } P + \text{val } Q$.

Solution 77

1. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors

$$P^2 = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} a_k a_\ell X^{k+\ell}$$

Par linéarité de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 P^2(x) dx = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} a_k a_\ell \int_{-1}^1 x^{k+\ell} dx = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{a_k a_\ell (1 - (-1)^{k+\ell+1})}{k + \ell + 1}$$

et également

$$\int_0^\pi P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} a_k a_\ell \int_0^\pi e^{i(k+\ell+1)\theta} d\theta = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{a_k a_\ell ((-1)^{k+\ell+1} - 1)}{i(k + \ell + 1)}$$

On en déduit immédiatement l'égalité annoncée.

Ensuite, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{-1}^1 P^2(x) dx \right| \leq \int_0^\pi |P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta}| d\theta$$

La première intégrale étant positive, on obtient donc

$$\int_{-1}^1 P^2(x) dx \leq \int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt$$

Le changement de variable $t \mapsto -t$ donne alors

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \int_{-\pi}^0 |P(e^{-it})|^2 dt$$

Mais comme P est à coefficients réelles, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(e^{-it}) = \overline{P(e^{it})} = \overline{P(e^{it})}$ de sorte que $|P(e^{it})| = |P(e^{-it})|$. Finalement,

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \int_{-\pi}^0 |P(e^{it})|^2 dt$$

et donc, via Chasles,

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt$$

On a donc bien l'inégalité annoncée.

2. Comme vu précédemment, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|P(t)|^2 = P(e^{it})P(e^{-it}) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} a_k a_\ell e^{i((k-\ell)t)}$$

Or il est clair que pour $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $\int_{-\pi}^\pi e^{i((k-\ell)t)} dt = 2\pi \delta_{k, \ell}$. Ainsi

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \pi \sum_{k=0}^n a_k^2$$

Enfin, puisque P^2 est à valeurs positives

$$\int_0^1 P^2(x) dx \leq \int_{-1}^1 P^2(x) dx$$

Un calcul similaire à celui effectué dans la question précédente montre que

$$\int_0^1 P^2(x) dx = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{a_k a_\ell}{k + \ell + 1}$$

ce qui fournit bien l'inégalité voulue.

Solution 78

Remarquons que $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il est clair que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, (k-1)!(k+1)! \geq (k!)^2$$

Il suffit alors de démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) \leq P^{(k)}(0)^2$$

Fixons $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Si $P^{(k-1)}(0) = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, on montre classiquement à l'aide du théorème de Rolle que si Q est un polynôme scindé sur \mathbb{R} , alors Q' est également scindé sur \mathbb{R} . Ainsi $P^{(k-1)}$ est scindé sur \mathbb{R} . En notant $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les racines de P_{k-1} et μ_1, \dots, μ_d leurs multiplicités, alors

$$\frac{P^{(k)}}{P^{(k-1)}} = \sum_{i=1}^d \frac{\mu_i}{X - \alpha_i}$$

Ainsi $\frac{P^{(k)}}{P^{(k-1)}}$ est décroissante sur chaque intervalle ne contenant pas une racine de $P^{(k-1)}$. Sa dérivée $\frac{P^{(k+1)}P^{(k-1)} - (P^{(k)})^2}{(P^{(k-1)})^2}$ est donc négative sur chaque intervalle ne contenant pas une racine de $P^{(k-1)}$. Notamment, $P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) \leq P^{(k)}(0)^2$, ce qui permet de conclure.

Solution 79

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On aurait alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x.$$

Le polynôme $P - X$ admettrait alors une infinité de racines (tous les réels !) et serait donc nul. Ainsi, on aurait $P = X$. Il est clair que c'est absurde car $P(i) = i \neq -i$.