

RAISONNEMENTS ET ENSEMBLES

Quantificateurs

Solution 1

1. Il suffit d'établir une table de vérité.

P	Q	NON P	(NON P) OU Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On retrouve la table de vérité de l'implication d'où l'équivalence demandée.

2. D'après la question précédente,

$$(\text{NON } Q \implies \text{NON } P) \equiv (\text{NON}(\text{NON } Q) \text{ OU } \text{NON } P) \equiv (Q \text{ OU } \text{NON } P) \equiv (P \implies Q)$$

Solution 2

1. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition 1. est vraie : soit $n \in \mathbb{N}$; posons $m = 1$. On a bien que 1 divise n .

2. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m \text{ ne divise pas } n.$$

La proposition 2. est vraie : posons $m = 1$; soit $n \in \mathbb{N}$. On a bien que 1 divise n .

3. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \forall u, v \in \mathbb{Z}, au + bv \neq 1.$$

La proposition 3. est fautive : posons $a = b = 2$; soient $u, v \in \mathbb{Z}$. On a $au + bv = 2(u + v) \neq 1$.

4. La négation de la proposition s'écrit

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon.$$

La proposition 4. est vraie : posons $a = 0$; soit $\varepsilon > 0$. On a bien $|a| \leq \varepsilon$.

5. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}, |a| > \varepsilon.$$

La proposition 5. est vraie : soit $\varepsilon > 0$; posons $a = \varepsilon/2$. On a bien $|a| < \varepsilon$.

6. La négation de la proposition s'écrit

$$\exists M > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, M < 2^n.$$

La proposition 6. est vraie : soient $M > 0$ et n_0 un entier strictement plus grand que $\ln(M)/\ln(2)$. Soit $n \geq n_0$. On a bien $2^n \geq M$.

Solution 3

1. La négation de \mathcal{A} est

$$\exists x \in]0, +\infty[, \exists y \in]x, +\infty[, \forall z \in]0, +\infty[, (x \geq z \text{ ou } z \geq y)$$

2. Oui, l'assertion \mathcal{A} est vraie. Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $y \in]x, +\infty[$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$. Puisque $x < y$ on a

$$x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} = z < \frac{y+y}{2} = y$$

Récurrance

Solution 4

Il faut bien sûr effectuer une récurrence double. Soit pour tout $n \geq 1$,

$$\text{HR}(n) : (n-1)! \leq u_n \leq n!$$

- HR(1) et HR(2) sont vraies puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
- Supposons HR(n) et HR($n+1$) vraies pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$(n-1)! \leq u_n \leq n!$$

et

$$n! \leq u_{n+1} \leq (n+1)!$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$(n-1)! + n! \leq u_n + u_{n+1} \leq n! + (n+1)!$$

En multipliant par $(n+1)$, on obtient

$$(n-1)!(n+1) + (n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+1)! + (n+1)!(n+1)$$

D'une part, $(n-1)!(n+1) + (n+1)! \geq (n+1)!$ car $(n-1)!(n+1) \geq 0$. D'autre part

$$(n+1)! + (n+1)!(n+1) = (n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

Finalement $(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$ i.e. HR($n+2$) est vraie.

- Par récurrence double, HR(n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution 5

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, HR(n) la proposition suivante

$$1 + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

- HR(1) est banalement vraie.
- Prouvons que pour tout $n \geq 1$, HR(n) implique HR($n+1$): soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Alors

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

car

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

HR($n+1$) est donc vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}.$$

Solution 6

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, HR(n) la proposition

$$\forall k \leq n, \quad u_k \geq k.$$

- HR(0), HR(1) et HR(2) sont vraies car $u_0 = 1 \geq 0$, $u_1 = 1 \geq 1$ et $u_2 = 2 \geq 2$.
- Prouvons que pour tout $n \geq 2$, HR(n) \Rightarrow HR($n + 1$). Soit $n \geq 2$. Supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire

$$\forall k \leq n, \quad u_k \geq k.$$

On a alors $u_n \geq n$ et $u_{n-1} \geq n - 1$, d'où

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geq n + n - 1 = 2n - 1.$$

Or $2n - 1 \geq n + 1$ puisque $n \geq 2$. Ainsi $u_{n+1} \geq n + 1$ et HR($n + 1$) est vraie.

- D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n.$$

Solution 7

On note HR(n) l'hypothèse de récurrence : « Si E_1, E_2, \dots, E_n sont n ensembles distincts deux à deux, alors l'un au moins des ensembles ne contient aucun autre. »

La propriété est évidente au rang $n = 1$.

Supposons HR(n) pour un certain $n \geq 1$ et montrons HR($n + 1$). Soient donc E_1, \dots, E_n, E_{n+1} $n + 1$ ensembles distincts deux à deux. A fortiori, E_1, \dots, E_n sont distincts deux à deux. Par hypothèse de récurrence, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que E_i ne contient aucun des E_j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$. Il y a alors deux cas à étudier.

- Si E_i ne contient pas E_{n+1} , alors E_i ne contient aucun autre ensemble et le tour est joué.
- Si E_i contient E_{n+1} , on montre que E_{n+1} ne contient aucun des autres ensemble. En effet, E_{n+1} ne peut pas contenir E_i sinon on aurait $E_i = E_{n+1}$ ce qui est exclu puisque tous les ensembles sont distincts. E_{n+1} ne peut pas non plus contenir un des E_j pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sinon E_i contiendrait ce même E_j , ce qui est exclu.

La propriété HR(n) est donc vraie pour tout n par récurrence.

Solution 8

On raisonne par récurrence forte.

Initialisation Tout d'abord $u_0 = 1 \leq 0! = 1$.

Hérédité Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leq k!$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$u_{n+1} \leq 0! + 1! + \dots + n!$$

Mais par croissance de la factorielle, $k! \leq n!$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi

$$u_{n+1} \leq n! + n! + \dots + n! = (n + 1)n! = (n + 1)!$$

Conclusion Par récurrence forte, $u_n \leq n!$ $n \in \mathbb{N}$.

Solution 9

1. On trouve $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$.

2. On a bien $F_5 = 5 \geq 5$ et $F_6 = 8 \geq 6$. Supposons que $F_n \geq n$ et $F_{n+1} \geq n+1$ pour un certain $n \geq 5$. Alors $F_{n+2} \geq 2n+1$. Or $2n+1 \geq n+2$ car $n \geq 5 \geq 1$. Ainsi $F_{n+2} \geq n+2$.
Par récurrence double, $F_n \geq n$ pour tout $n \geq 5$.
On peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

3. a. On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+2} - F_{k+1} = 1 + F_{n+1} - F_1 = F_{n+1}$$

car $F_1 = 1$.

- b. On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+2} - F_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2(k+1)} - F_{2k} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

car $F_0 = 0$.

- c. On utilise la définition de la suite (F_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2k+1} - F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{2(k+1)-1} - F_{2k-1} = F_{2n-1} - F_1 = F_{2n-1} - 1$$

car $F_1 = 1$.

4. a. On trouve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Les liens coefficients/racines nous apprennent que $\alpha\beta = -1$.

- b. On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^0 - \beta^0) = 0 = F_0$ et que $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1 = F_1$.

On suppose maintenant que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ et $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n + \alpha^{n+1} - \beta^n - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n(1 + \alpha) - \beta^n(1 + \beta)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n \alpha^2 - \beta^n \beta^2) \quad \text{car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2 = x + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \end{aligned}$$

Par récurrence double, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. On tient compte du fait que $\beta = -\frac{1}{\alpha}$.

D'une part

$$\begin{aligned} F_{p+q} F_r &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q})(\alpha^r - (-1)^r \alpha^{-r}) \\ &= \frac{1}{5}(\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^r \alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q+r}) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q &= \frac{1}{5} (\alpha^p - (-1)^p \alpha^{-p}) (\alpha^{q+r} - (-1)^{q+r} \alpha^{-q-r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5} (\alpha^{p-r} - (-1)^{p-r} \alpha^{-p+r}) (\alpha^q - (-1)^q \alpha^{-q}) \\
 &= \frac{1}{5} (\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^{q+r} \alpha^{p-q-r} - (-1)^p \alpha^{-p+q+r}) \\
 &\quad - \frac{(-1)^r}{5} (\alpha^{p+q-r} + (-1)^{p+q-r} \alpha^{-p-q+r} - (-1)^q \alpha^{p-q-r} - (-1)^{p-r} \alpha^{-p+q+r}) \\
 &= \frac{1}{5} (\alpha^{p+q+r} + (-1)^{p+q+r} \alpha^{-p-q-r} - (-1)^r \alpha^{p+q-r} - (-1)^{p+q} \alpha^{-p-q+r})
 \end{aligned}$$

On en déduit que $F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r$.

Solution 10

Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons HR(n) la proposition

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

- HR(1) est vraie car les deux membres sont dans ce cas égaux à 2.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons HR(n) vérifiée, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

En multipliant membre à membre par $1 + \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) &\leq \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \\
 \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) &\leq 3 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

est donc une *condition suffisante* de HR($n+1$). Or,

$$\begin{aligned}
 &\left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n+1} \\
 \Leftrightarrow &\frac{(3n-1)(1+(n+1)^3)}{n(n+1)^3} \leq \frac{3n+2}{n+1} \\
 \Leftrightarrow &(3n-1)(n^3+3n^3+3n+2) \leq (3n+2)n(n+1)^2 \\
 \Leftrightarrow &3n^4+8n^3+6n^2+3n-2 \leq 3n^4+8n^3+7n^2+2n \\
 \Leftrightarrow &0 \leq n^2-n+2
 \end{aligned}$$

Le déterminant du trinôme $X^2 - X + 2$ étant strictement négatif, la dernière inégalité est vraie et donc la première également. Par suite, HR($n+1$) est vérifiée.

- D'après le principe de récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 11

Première méthode

Notons HR(n) : $u_n = 2^{n-1}$. Clairement, $u_1 = 1$ donc HR(1) est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que HR(k) soit vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n$$

de sorte que $HR(n+1)$ est vraie. Par récurrence forte, $HR(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Seconde méthode

On peut également remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = 2u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique à partir du rang 1 et $u_1 = 1$ donc $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Contraposition et absurde

Solution 12

Raisonnons par contraposition. Supposons $a \neq 0$. Posons $\varepsilon = |a|/2$: on a $\varepsilon > 0$ et $|a| \geq \varepsilon$. Ainsi $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|a| \geq \varepsilon$.

Solution 13

Quitte à permuter les a_i , on peut supposer que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9.$$

Prouvons par contraposition que

$$(a_1 + \dots + a_9 = 90) \implies (a_7 + a_8 + a_9 \geq 30).$$

Supposons que $a_7 + a_8 + a_9 < 30$. On a alors

$$a_4 + a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

et

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30.$$

Ainsi $a_1 + \dots + a_9 < 90$ donc $a_1 + \dots + a_9 \neq 90$.

Solution 14

- Supposons que n est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2$. Donc n^2 est pair. Réciproquement supposons que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k(k+1)$. Donc n^2 est impair.
- Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = m/n$. Quitte à simplifier on peut supposer que la fraction m/n est irréductible. On a

$$(*) \quad 2n^2 = m^2.$$

De cette équation on déduit que m^2 est pair, donc m aussi. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k$. Ainsi $(*)$ devient $2n^2 = m^2 = 4k^2$, d'où $n^2 = 2k^2$. Par conséquence n^2 est pair, et donc n est aussi pair. On peut donc simplifier la fraction m/n par 2. Or d'après l'hypothèse la fraction m/n est irréductible, contradiction ζ

Cela prouve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve alternative. Notons $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. Tout nombre entier positif possède une factorisation unique en nombres premiers, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists_1 (v_p(n)) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{P})} : n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)}.$$

La notation $\mathbb{N}^{(\mathbb{P})}$ désigne l'ensemble des applications de \mathbb{P} dans \mathbb{N} qui sont nulles à partir d'un certain rang. Par exemple, $20 = 2^2 \times 5$ donc $v_2(20) = 2$, $v_5(20) = 1$ et $v_p(20) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 5\}$.

Maintenant, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = m/n$, autrement dit $2n^2 = m^2$. Alors

$$2 \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)} \right)^2 = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(m)} \right)^2,$$

d'où

$$2 \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2\nu_p(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{2\nu_p(m)}.$$

Par unicité de cette décomposition $2\nu_2(n) + 1 = 2\nu_2(m)$, une contradiction. ζ

Solution 15

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ln(2)/\ln(3)$ rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p et $q \neq 0$ tels que $\ln(2)/\ln(3) = p/q$, ie $q \ln(2) = p \ln(3)$, ie $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ d'où $2^q = 3^p$. Puisque $q \geq 1$, 2^q est un nombre pair, ce qui est absurde car 3^p est toujours impair.

Solution 16

Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres !)

- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x}P(x) = 1$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}P(x) = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $+\infty$, donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite, $0 = 1$. Ce qui est absurde.
- Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = e^x$. L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme P est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = e^x = P(x)$, ie $P = P'$, ce qui est absurde car P étant non nul, cela implique $\deg(P) < \deg(P)$.

Analyse/synthèse

Solution 17

Soit f une telle fonction. Pour tout x réel, on a

$$f(-x) = -f(x) \text{ et } f(-x) - 1 = f(x) - 1,$$

d'où $f(x) = -f(x)$ et $f(x) = 0$. Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est solution du problème posé.

Solution 18

- *Analyse* : soit f une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$

On a alors $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Par une récurrence immédiate, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

- *Synthèse* : soient $k \in \mathbb{N}$ et f l'application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = kn$. Il est immédiat que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $f(m+n) = f(n) + f(m)$.

Solution 19

- *Analyse* : supposons que f désigne une solution de l'équation. On en déduit (en fixant $y = 0$) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(0) = 2f(x) + 1,$$

ie $f(x) = f(0) - 1$. Ceci prouve que f est nécessairement une fonction constante.

REMARQUE. La partie synthèse va maintenant permettre de déterminer, parmi les fonctions constantes, celles qui sont effectivement solutions.

- *Synthèse* : soit f une fonction constante qu'on suppose égale au réel c , i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c.$$

La fonction f est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) + f(y) = 2f(x - y) + 1.$$

i.e $c + c = 2c + 1$, soit encore $0 = 1$. Ceci est absurde ! Il n'y a donc pas de solution constante à l'équation de l'énoncé.

- *Conclusion* : dans la partie analyse on a prouvé que seules les fonctions constantes pouvaient être solutions de l'équation. Dans la partie synthèse, on a vérifié qu'aucune fonction constante ne pouvait être solution.

Solution 20

On remarque que rechercher x, y tels que $xy \neq 0$ et

$$\alpha xy = x^2 + y^2,$$

revient à trouver les valeurs non nulles de y telles que l'équation

$$X^2 - \alpha y X + y^2 = 0$$

admet une solution non nulle.

- *Analyse* : soient x, y tels que $xy \neq 0$ et

$$\alpha xy = x^2 + y^2.$$

Alors le discriminant de l'équation

$$X^2 - \alpha y X + y^2 = 0,$$

$\Delta = (\alpha^2 - 4)y^2$ est positif. Et, puisque $y \neq 0$,

$$\alpha^2 \geq 4.$$

- *Synthèse* : supposons $\alpha^2 \geq 4$. Soit alors $y = 1$. Alors le discriminant de l'équation

$$X^2 - \alpha X + 1 = 0,$$

$\Delta = (\alpha^2 - 4)$ est positif et les deux racines x_1 et x_2 de l'équation sont non nulles puisque $x_1 x_2 = 1$. Le couple $(x_1, 1)$ est une solution au problème posé.

- *Conclusion* : la condition nécessaire et suffisante est $\alpha^2 \geq 4$, i.e $|\alpha| \geq 2$.

Solution 21

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels a et b tels que

$$\forall n \geq 0, u_n = a + b2^n.$$

Alors $u_0 = 1 = a + b$ et $u_1 = 7 = a + 2b$. Ce système linéaire 2×2 en (a, b) admet une unique solution, le couple $(-5, 6)$.

- *Synthèse* : prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = -5 + 6 \times 2^n$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, HR(n) la proposition suivante,

$$\forall k \leq n, u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$

• HR(0) et HR(1) sont banalement vraies.

• Prouvons que pour tout $n \geq 1$, HR(n) implique HR($n + 1$) : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire

$$\forall k \leq n, u_k = -5 + 6 \times 2^k.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(-5 + 6 \times 2^n) - 2(-5 + 6 \times 2^{n-1}) \\ &= -5 + (18 - 6) \times 2^n = -5 + 6 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$

HR($n + 1$) est donc vraie.

✎ D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -5 + 6 \times 2^n.$$

Solution 22

- *Analyse* : supposons l'existence de deux nombres réels α et β tels que $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$. Alors α et β sont les racines réelles du polynôme

$$Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - sx + p.$$

Le discriminant de cet équation est donc positif : $s^2 \geq 4p$.

- *Synthèse* : supposons $s^2 \geq 4p$ et posons $\Delta = s^2 - 4p$. Soient α et β les racines de $x^2 - sx + p$, par exemple $\alpha = (s + \sqrt{\Delta})/2$ et $\beta = (s - \sqrt{\Delta})/2$. On a bien que $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$.
- *Conclusion* : s et p sont respectivement la somme et le produit de deux nombres réels si et seulement si $s^2 \geq 4p$.

Solution 23

- *Analyse* : Soit f une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(n)f(m)$$

On a notamment $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n + 1) = f(n)f(1)$ donc la suite de terme général $f(n)$ est géométrique de raison $k = f(1) \in \mathbb{N}$. Si $f(0) = 0$, alors f est nulle sur \mathbb{N} et si $f(0) = 1$ alors $f(n) = k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Synthèse* : Soient $k \in \mathbb{N}$ et f l'application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = k^n$$

Il est immédiat que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(n)f(m)$$

L'application identiquement nulle vérifie également cette équation fonctionnelle.

- *Conclusion* : les seules fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{N} vérifiant

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(n)f(m),$$

sont les fonctions de la forme

$$n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = k^n$$

où $k \in \mathbb{N}$ et la fonction nulle.

Disjonction de cas

Solution 24

1. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} |x + 2| \geq \frac{1 - x}{1 + x} &\Leftrightarrow x + 2 \geq \frac{1 - x}{1 + x} \text{ ou } -(x + 2) \geq \frac{1 - x}{1 + x} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 2)(1 + x) - (1 - x)}{1 + x} \geq 0 \text{ ou } \frac{(x + 2)(1 + x) + (1 - x)}{1 + x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 1}{1 + x} \geq 0 \text{ (1) ou } \frac{x^2 + 2x + 3}{1 + x} \leq 0 \text{ (2)} \end{aligned}$$

Les racines de $x^2 + 4x + 1$ sont $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	-1	$-2 + \sqrt{3}$	$+\infty$	
$x^2 + 4x + 1$	+	0	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2+4x+1}{1+x}$	-	0	+	-	0	+

L'ensemble des solutions de (1) est donc $\mathcal{S}_1 = [-2 - \sqrt{3}, -1[\cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

Le trinôme $x^2 + 2x + 3$ est constamment positif; l'ensemble des solutions de (2) est donc $\mathcal{S}_2 =]-\infty, -1[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -1[\cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

2. On raisonne également par équivalences :

$$\begin{aligned}
 x + 1 \leq \sqrt{x+2} &\Leftrightarrow x + 2 \geq 0 \text{ ET } (x + 1 \leq 0 \text{ OU } (x + 1 \geq 0 \text{ ET } (x + 1)^2 \leq x + 2)) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ OU } \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ OU } \begin{cases} x \leq -1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ OU } -1 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\
 &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left[-2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Solution 25

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il y a deux cas à considérer, $x \geq 1$ et $x < 1$.

- Cas 1 : $x \geq 1$. On a alors

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq x - 1.$$

Ce qui est encore équivalent à $x^2 - 2x + 1 \geq -1$, c'est-à-dire $(x - 1)^2 \geq -1$, inégalité vérifiée pour tout x réel.

- Cas 2 : $x < 1$. On a alors

$$x^2 - x + 1 \geq |x - 1| \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq 1 - x.$$

Ce qui est encore équivalent à $x^2 \geq 0$, inégalité vérifiée pour tout x réel.

- Conclusion : on a prouvé que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geq |x - 1|.$$

Implication et équivalence

Solution 26

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
 & |x + y| = |x| + |y| \\
 \Leftrightarrow & |x + y|^2 = (|x| + |y|)^2 && \text{car les membres de l'égalité sont positifs} \\
 \Leftrightarrow & (x + y)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \\
 \Leftrightarrow & xy = |x||y| \\
 \Leftrightarrow & xy \geq 0
 \end{aligned}$$

Solution 27

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$. Alors

$$(\alpha + \beta/2)^2 - \beta^2/4 + \beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire $(\alpha + \beta/2)^2 + 3\beta^2/4 = 0$. Ainsi $\alpha + \beta/2 = \beta = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$.

Inégalités et inéquations

Solution 28

1. On résout par équivalence.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{|x-3|} = |x-1| \\
 \Leftrightarrow & |x-3| = (x-1)^2 \text{ car les deux membres sont positifs} \\
 \Leftrightarrow & x-3 = (x-1)^2 \text{ ou } x-3 = -(x-1)^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = -1 \text{ ou } x = 2
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-1, 2\}$.

2.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{|x-3|} \leq x-1 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ |x-3| \leq (x-1)^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ -(x-1)^2 \leq x-3 \leq (x-1)^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & x \geq 2
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $[2, +\infty[$.

Solution 29

Remarquons que $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$. La dernière inégalité étant toujours vraie, la première l'est également.

Solution 30

1.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{|x^2 - 4|} \leq |x - 1| \\
\iff & |x^2 - 4| \leq |x - 1|^2 \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & |x^2 - 4| \leq (x - 1)^2 \\
\iff & |x^2 - 4|^2 \leq (x - 1)^4 \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & (x^2 - 4)^2 \leq (x - 1)^4 \\
\iff & 0 \leq (x - 1)^4 - (x^2 - 4)^2 \\
\iff & 0 \leq [(x - 1)^2 + (x^2 - 4)][(x - 1)^2 - (x^2 - 4)] \\
\iff & 0 \leq (2x^2 - 2x - 3)(5 - 2x)
\end{aligned}$$

Or les racines du trinôme $2x^2 - 2x - 3$ sont $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est $]-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{2}] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{5}{2}\right[$.

2.

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-2}{x+2} \\
\iff & \frac{(x+1)(x+2) - (x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\
\iff & \frac{6x}{(x-1)(x+2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Un tableau de signes permet de conclure que l'ensemble des solutions est $] -\infty, -2[\cup [0, 1[$.

3. Remarquons tout d'abord que les membres de l'inégalité ne sont définis que pour $x > -1$ ou $x < -2$. On suppose donc que x vérifie ces inégalités par la suite.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \\
\iff & \frac{x+1}{x+2} \leq \frac{x+2}{x+1} \quad \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\
\iff & 0 \leq \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \\
\iff & 0 \leq \frac{(x+2)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \\
\iff & 0 \leq \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} \\
\iff & x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{car } (x+1)(x+2) > 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $] -1, +\infty[$.

Solution 31

L'inégalité est définie lorsque l'expression sous la racine carrée est positive, c'est-à-dire pour $x \in [0, 2]$. Si $x < 1$ l'inégalité est manifestement fautive. Considérons donc le cas où $x \geq 1$. Puisque dans ce cas les deux côtés de l'inégalité sont des nombres positifs on peut « prendre le

carré» de l'inégalité.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x - x^2} < x - 1 &\iff 2x - x^2 < (x - 1)^2 \\
 &\iff 2x - x^2 < x^2 - 2x + 1 \\
 &\iff 0 < 2x^2 - 4x + 1 \\
 &\iff x < \frac{4 - \sqrt{8}}{4} \text{ ou } x > \frac{4 + \sqrt{8}}{4} \\
 &\stackrel{x \geq 1}{\iff} x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$.

Solution 32

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, HR(n) la proposition suivante

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

- HR(1), HR(2) et HR(3) sont banalement vraies.
- Prouvons que pour tout $n \geq 1$, HR(n) implique HR($n + 1$). soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

On a

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n + 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n + 2} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{2n + 1}{2n + 2},$$

donc

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n + 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n + 2} \leq \frac{2n + 1}{2(n + 1)\sqrt{3n + 1}}.$$

Or,

$$\frac{2n + 1}{2(n + 1)\sqrt{3n + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 4}}$$

est équivalent à

$$\frac{(2n + 1)^2}{4(n + 1)^2(3n + 1)} \leq \frac{1}{3n + 4},$$

qui est aussi équivalent à

$$(2n + 1)^2(3n + 4) \leq 4(n + 1)^2(3n + 1)$$

et encore à

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 1$$

qui est finalement équivalent à $n \geq 3$, HR($n + 1$) est donc vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n + 1}}.$$

Solution 33

Soit, pour tout $n \geq 2$, HR(n) la proposition suivante

$$\forall a \in]0, 1[, \quad 1 - na < (1 - a)^n < \frac{1}{1 + na}.$$

- HR(2) est vraie car

$$(1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2 > 1 - 2a$$

et

$$(1 - a)^2(1 + 2a) - 1 = a^2(2a - 3) < 0$$

lorsque $a \in]0, 1[$.

- Prouvons que pour tout $n \geq 1$, HR(n) implique HR($n + 1$) : soit $n \in \mathbb{N}$; supposons HR(n) vraie, c'est-à-dire $\forall a \in]0, 1[, \forall n \geq 2$

$$1 - na < (1 - a)^n < \frac{1}{1 + na}.$$

Soit alors $a \in]0, 1[$. On a

$$(1 - a)^{n+1} > (1 - na)(1 - a),$$

donc

$$(1 - a)^{n+1} > 1 - (n + 1)a + na^2 > 1 - (n + 1)a.$$

De plus

$$(1 - a)^{n+1} = (1 - a)(1 - a)^n < \frac{1 - a}{1 + na}.$$

Or,

$$\frac{1 - a}{1 + na} < \frac{1}{1 + (n + 1)a}$$

est équivalent à

$$1 - a + (n + 1)a - (n + 1)a^2 < 1 + na$$

c'est-à-dire à $-(n + 1)a < 0$ qui est banalement vérifiée. HR($n + 1$) est donc vraie.

- D'après le principe de récurrence,

$$\forall a \in]0, 1[, \forall n \geq 2, 1 - na < (1 - a)^n < \frac{1}{1 + na}.$$

Solution 34

L'inégalité est une conséquence immédiate de

$$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \geq 0.$$

Solution 35

Soient a et b dans \mathbb{R}_+^* .

1. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{(a + b)^2}{ab} \geq 4,$$

comme $ab > 0$, ceci équivaut à

$$(a + b)^2 - 4ab \geq 0.$$

Or cette dernière est clairement puisque

$$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

2. On a, pour tous x et y positifs

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

c'est-à-dire

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Ainsi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc} \quad \text{et} \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

On en déduit que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{abcca} = 8abc.$$

3. Après mise au même dénominateur, l'inégalité est équivalente à

$$\frac{a^2 - 2\sqrt{ba} + b}{a} = \frac{(a - \sqrt{b})^2}{a} \geq 0,$$

inégalité clairement vérifiée.

Solution 36

1. On trouve $x = 2$ ou -8 .

2. $\mathcal{S} = [-8, 5]$.

3. $\mathcal{S} =]-\infty, -8[\cup]5, +\infty[$.

4. L'équation équivaut à $x^2 - 4 = \pm(2x - 5)$, ie $x = 1$ ou $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

5. $\mathcal{S} = [-8, 5]$.

6. $\mathcal{S} = [\frac{2}{3}, 6]$.

7. $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]5, +\infty[$.

REMARQUE. Tous ces résultats s'obtiennent après avoir dressé un tableau de signes.

Solution 37

En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy - 1| \leq |x - 1| + |y - 1| + |x - 1||y - 1|.$$

On remarque alors que

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + x - 1 + y - 1,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy - 1| \leq |(x - 1)(y - 1)| + |x - 1| + |y - 1|,$$

d'où le résultat.

Solution 38

- Plaçons-nous sur l'intervalle $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. L'équation est alors équivalente à

$$3 - x^2 > 2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 < 1,$$

ie $x \in] -1, 1[$.

- Plaçons-nous sur $] -\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$. L'équation est alors équivalente à

$$x^2 - 3 > 2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 > 5,$$

ie $x \in] -\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

- L'ensemble des solutions est donc

$$]-1, 1[\cup]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[.$$

Solution 39

Puisque $0 \leq x \leq y$,

$$0 \leq x^2 \leq xy,$$

mais aussi

$$xy \leq y^2,$$

d'où

$$0 \leq x^2 \leq xy \leq y^2,$$

et donc

$$0 \leq x \leq \sqrt{xy} \leq y.$$

Solution 40

1. Puisque les deux membres sont positifs, l'inégalité est équivalente à

$$\sqrt{a+b}^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

c'est-à-dire

$$a + b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b,$$

ce qui équivaut à $2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$. Puisque cette dernière inégalité est banalement vraie, l'inégalité initiale l'est également.

2. Puisque les deux membres de l'inégalité sont invariants par permutation des réels a et b , on peut toujours supposer que $a \leq b$, quitte à permuter les deux nombres. On a d'après la première question appliquée à $a \geq 0$ et $b - a \geq 0$,

$$\sqrt{b} = \sqrt{a + b - a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b - a}$$

et donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b - a} = \sqrt{|a - b|}$. De plus, on a par croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}_+ ,

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0 \leq \sqrt{|b - a|}.$$

Ainsi $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|b - a|}$.

Solution 41

On se donne $\lambda \in [0, 1]$ et on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_\lambda} + \sqrt{b_\lambda} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{a_\lambda} + \sqrt{b_\lambda})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 && \text{car les membres de l'inégalité précédente sont positifs} \\ \Leftrightarrow & a_\lambda + b_\lambda + 2\sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geq a + b + 2\sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a_\lambda b_\lambda} \geq \sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow & a_\lambda b_\lambda \geq ab && \text{par croissance des fonctions carrée et racine carrée} \\ \Leftrightarrow & \lambda^2(2ab - a^2 - b^2) + \lambda(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 && \text{après simplification} \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \lambda(1 - \lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie puisque $\lambda \in [0, 1]$. Par équivalence, l'inégalité de départ est également vraie.

Ensembles

Solution 42

Prouvons par exemple que $A = B$ par double inclusion.

On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$. De même, $A \subset A \cup C = B \cap C \subset B$. L'égalité $B = C$ se démontre de la même manière.

Solution 43

Montrons l'égalité des deux ensembles. Comme

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$$

on a

$$\begin{aligned} Y &= [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\ &= [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\ &= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) = X \end{aligned}$$

Solution 44

► Supposons que $A = B$. On a alors banalement

$$A \cap B = A \cup B = A = B.$$

► *Réciproquement*, supposons que $A \cup B = A \cap B$. Montrons que $A = B$ par double inclusion. On a

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$$

et puisque A et B jouent des rôles symétriques, on a également $B \subset A$.

Solution 45

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. Cette inclusion est *stricte* car $1 = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \in \mathcal{E}$ mais $1 \notin \mathcal{F}$.

Solution 46

1. Notons A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

Les droites $(AB), (CD), (AC), (BD)$ ont pour équations respectives $x + y = 1, x + y = -1, x - y = 1, x - y = -1$. On en déduit que A_1 est la portion du plan strictement comprise entre les droites (AB) et (CD) et que A_2 est la portion du plan strictement comprise entre les droites (AC) et (BD) .

En se plaçant successivement sur les quatre quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, on montre que A_3 est la réunion des triangles OAB, OAD, OCA, OCD autrement dit le carré $ABCD$.

2. La question précédente montre que $A_1 \cap A_2 = A_3$, ce qui équivaut bien à l'équivalence demandée.

Solution 47

On a $A \subset A \cup B = B \cap C \subset B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$.

Solution 48

Supposons $D = A \times B$ où A et B sont deux parties de \mathbb{R} . Comme $(1, 0) \in D, 1 \in A$. De la même façon, $(0, 1) \in D$ donc $1 \in B$. Par conséquent, $(1, 1) \in D$, ce qui est faux.

Solution 49

Il y a toujours deux modes de raisonnement possibles : soit en raisonnant sur les éléments, soit directement sur les ensembles. La seconde méthode est généralement plus élégante et plus rapide.

1. On suppose $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

Première méthode Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B = A \cup C$. Si $x \notin A$, alors $x \in C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$. Donc $x \in C$. Dans les deux cas, $x \in C$. On en déduit que $B \subset C$. Les rôles de B et C étant symétriques, on a également $C \subset B$. D'où $B = C$.

Deuxième méthode On a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$. D'une part, $B \cap A = C \cap A$. D'autre part,

$$B \cap \bar{A} = (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A = C \cap \bar{A}$$

$$\text{Ainsi } B = (C \cap A) \cup (C \cap \bar{A}) = C.$$

2. **Première méthode** Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ et $x \notin B$. A fortiori, $x \notin B \cap C$. Donc $x \in A \setminus (B \cap C)$. De même, si $x \in A \setminus C$, $x \in A \setminus (B \cap C)$. On en déduit que $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$.

Soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. Si $x \in B$, alors $x \notin C$ donc $x \in A \setminus C$. Ainsi $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. On en déduit que $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Par double inclusion, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Deuxième méthode Beaucoup plus rapidement :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \setminus (B \cap C)$$

Solution 50

1.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

2.

$$2\mathbb{Z} + 1 = \{ n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1 \} = \{ 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}$$

3.

$$i\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C}, \exists b \in \mathbb{R}, z = ib \} = \{ ib, b \in \mathbb{R} \} = \{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0 \}$$

4.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \}$$

Solution 51

1.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) \}$$

2.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) \}$$

3.

$$\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \}$$

Solution 52

Notons $A = (X \cup Z) \cap (Y \cup \bar{Z})$ et $B = (X \cap \bar{Z}) \cup (Y \cap Z)$.

Première méthode : en utilisant trois fois la distributivité de \cap sur \cup , on obtient l'égalité $A = (X \cap Y) \cup (Z \cap Y) \cup (X \cap \bar{Z})$, c'est-à-dire : $A = (X \cap Y) \cup B$. Ainsi $A = B \iff X \cap Y \subset B$.

Prouvons donc l'inclusion $X \cap Y \subset B$.

Si $x \in X \cap Y$, on a deux cas :

- soit $x \in Z$, et alors $x \in Y \cap Z$ (puisque $x \in Y$), donc $x \in B$ (puisque $Y \cap Z \subset B$).
- soit $x \in \bar{Z}$, et alors $x \in X \cap \bar{Z}$ (puisque $x \in X$), donc $x \in B$ (puisque $X \cap \bar{Z} \subset B$).

Deuxième méthode : avec les fonctions indicatrices. Le calcul de $\mathbb{1}_B$ est le plus simple : puisque $(X \cap \bar{Z}) \cap (Y \cap Z) = \emptyset$, on a $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\bar{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$. Pour calculer $\mathbb{1}_A$ on développe en gardant $\mathbb{1}_{\bar{Z}}$ sous cette forme (sans la remplacer par $1 - \mathbb{1}_Z$), et on utilise que $\mathbb{1}_Z \mathbb{1}_{\bar{Z}} = 0$ puisque $Z \cap \bar{Z} = \emptyset$. Il reste au final $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\bar{Z}} + \mathbb{1}_Y \mathbb{1}_Z$, on a donc bien $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, et donc $A = B$.