

Partie entière**Exercice 1 ★★**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Exercice 2 ★★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Exercice 3 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 4 ★**Calcul d'une partie entière**

On se propose de calculer la partie entière du réel

$$\alpha = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 5 ★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 6 ★★

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 7 ★**Partie fractionnaire d'un réel**

On définit la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

- Calculer $\{54, 465\}$ et $\{-36, 456\}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.
- Prouver que la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \{x\}$$

est périodique et tracer son graphe.

Exercice 8 ★

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par l'expression

$$\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$$

lorsque x et y décrivent \mathbb{R} .

Exercice 9 ★★**Une addition par paliers**

Un classique.

- Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer les entiers naturels k tels que

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m.$$

- Soit $n \geq 0$. Calculer en fonction de n ,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n^2+2n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Exercice 10 ★**Deux équations avec partie entière**

Résoudre sur \mathbb{R} les équations

- $[2x - 1] = [x + 1]$;
- $[x + 3] = [x - 1]$.

Exercice 11 ★**Un tracé**

Tracer le graphe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \left\lfloor \left| \frac{3}{2} - x \right| \right\rfloor.$$

Exercice 12 ★**Une inégalité sur la partie entière**

Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1.$$

Bornes supérieures et inférieures**Exercice 13 ★★****Point fixe**

Soit f une application *croissante* de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que'il existe $l \in [0, 1]$ tel que $f(l) = l$.

- On pose $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$. Montrer que A est non vide et majorée.
- On note alors $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0, 1]$.
- Montrer que $c \leq f(c)$.
- Montrer que $f(c) \in A$. Conclure.

Exercice 14 ★★★**ENSEA 2010**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n .

- Montrer que $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$.
- Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

Exercice 15 ★★★

Soient A et B deux ensembles non vides et f une application bornée de $A \times B$ dans \mathbb{R} . Comparer $\sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} f(x, y) \right)$ et $\inf_{y \in B} \left(\sup_{x \in A} f(x, y) \right)$.

Exercice 16 ★★

Soit f une application bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \inf_{y \geq x} f(y) \quad \text{et} \quad h(x) = \sup_{y \geq x} f(y)$$

Déterminer le sens de variation de g et h .

Exercice 17 ★

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

- $\mathcal{A} = \left\{ 1 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
- $\mathcal{B} = \left\{ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}, (m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\}$;
- $\mathcal{C} = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n \right\}$;
- $\mathcal{D} = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2}, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
- $\mathcal{E} = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
- $\mathcal{F} = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}, (n, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
- $\mathcal{G} = \left\{ \frac{mn}{m^2 + mn + n^2}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

Exercice 18 ★

Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} . Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et que

$$\sup(A \cup B) = \max[\sup(A), \sup(B)]$$

et

$$\inf(A \cup B) = \min[\inf(A), \inf(B)].$$

Exercice 19 ★**Un calcul de bornes**

Prouver l'existence puis calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble

$$A = \{(-1)^n/n \mid n \geq 1\}.$$

Exercice 20 ★**Bornes d'une somme de parties**

Soient A et B des parties non vides de \mathbb{R} . On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors A + B l'est aussi et que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$$

et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 21 ★★**Distance à une partie**

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| \mid a \in A\}.$$

(*expression qui se lit : « distance de x à A »*)

1. Donner une interprétation géométrique de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3 .
3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.
4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.
5. Caculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

Densité**Exercice 22 ★★★**

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 23 ★★

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose $a = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
5.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) convergeant vers x telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$.
 - b. On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 24 ★

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera à chaque fois sa réponse.

1. Si \mathcal{A} est une partie de \mathbb{R} dense dans \mathbb{R} , alors $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ n'est pas dense dans \mathbb{R} .
2. \mathbb{Z} est dense dans \mathbb{R} .
3. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux parties de \mathbb{R} telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} , alors \mathcal{B} est également dense dans \mathbb{R} .
4. Il existe des parties de \mathbb{R} bornées et denses dans \mathbb{R} .

Exercice 25 ★★

Etablir que $E = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

Irrationnels**Exercice 26 ★★****Irrationalité de e**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une fonction g par $g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in [0, 1]$. On définit également une fonction h par $h(x) = g(x) + e^{-x} \frac{x^n}{n!}$.

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$.
3. Montrer que h est strictement croissante sur $[0, 1]$.
4. En déduire que $e < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!}$.
5. On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$.
6. Conclure.

Exercice 27 ★★★**Théorème de Beatty**

Soit α et β deux réels non nuls tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On suppose $\alpha > 1$ et α irrationnel.

On pose

$$A = \{[n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[n\beta] \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

- Montrer que $\beta > 1$ et que β est également irrationnel.
- On suppose qu'il existe un couple $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $[p\alpha] = [q\beta]$. On pose alors $k = [p\alpha] = [q\beta]$.
 - Montrer que $p - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < p$ et $q - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < q$ et aboutir à une contradiction.
 - En déduire que $A \cap B = \emptyset$.
- On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'est ni dans A ni dans B .
 - Montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $[p\alpha] < k < [(p+1)\alpha]$ et $[q\beta] < k < [(q+1)\beta]$.
 - Montrer que $p < \frac{k}{\alpha} < p+1 - \frac{1}{\alpha}$ et $q < \frac{k}{\beta} < q+1 - \frac{1}{\beta}$ et aboutir à une contradiction.
 - En déduire que $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

Exercice 28 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $n \geq 3$. On pose $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$. On souhaite montrer que $\frac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = (\sqrt{n})^k \cos k\varphi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$.
- En déduire que les A_k sont des entiers.
- Montrer qu'aucun des A_k n'est divisible par n .
- Conclure en raisonnant par l'absurde.

Exercice 29 ★

Prouver que le nombre $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 30 ★

Le réel $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

Exercice 31**Rationnels et irrationnels**

Que dire de $x + y$ et xy dans les quatre cas suivants ?

- $x, y \in \mathbb{Q}$;
- $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- $y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 32 ★**Racines carrées d'entiers**

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, \sqrt{n} est rationnel si et seulement si n est un carré parfait (ie de la forme m^2 avec $m \in \mathbb{N}$).

Intervalles**Exercice 33 ★**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Montrer que

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}$$

Exercice 34

Prouver l'égalité

$$\bigcup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right[=]0, 1[\cup]1, 2[.$$

Relations binaires

Exercice 35 ★

Soit φ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tous réels a, b on pose

$$a \leq_{\varphi} b \iff \varphi(b) - \varphi(a) \geq |b - a|.$$

1. Montrer que \leq_{φ} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .
2. Montrer que cet ordre est total si et seulement si pour tous réels a, b , $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geq |b - a|$.
3. Quel ordre obtient on si $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$?

Exercice 36 ★

Soit X un ensemble de cardinal supérieur à 1. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre \subset . On note $E \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des singletons de E .

1. E possède-t-il un plus grand élément ?
2. E possède-t-il une borne supérieure ?

Exercice 37 ★★**L'ordre lexicographique**

On définit une relation binaire sur \mathbb{N}^2 par

$$x \leq y \text{ si et seulement si } \begin{pmatrix} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \end{pmatrix}$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

1. Prouver que \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^2 .
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose $A = \{(p, p), p \in \mathbb{N}\}$ et

$$B = \{(2, 10^p), p \in \mathbb{N}\}.$$

Les parties A et B de (\mathbb{N}^2, \leq) sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

Exercice 38 ★

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée \subset est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. L'ordre est-il total ?
3. On pose pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$\sup(A, B) = \sup(\{A, B\}) \text{ et } \inf(A, B) = \inf(\{A, B\}).$$

- a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(A, B)$ et $\inf(A, B)$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide des symboles \cup et \cap .
- b. Montrer plus généralement que toute partie non vide \mathcal{F} de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de \mathcal{F} en utilisant les symboles \cap et \cup .

Exercice 39 ★

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathbb{R} . Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $C(x) = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$. Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E .

Exercice 40 ★★

1. Montrer que la relation \mathcal{R} définie sur \mathbb{R} par

$$x \mathcal{R} y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x ?

Exercice 41 ★

On définit une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{C} par

$$z \mathcal{R} z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et décrire géométriquement les classes d'équivalence.

Exercice 42 ★

On définit sur \mathbb{Z} la relation \mathcal{R} par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x + y \text{ est pair.}$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 43 ★

On définit la relation d'équivalence \mathcal{R} sur \mathbb{R} par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et déterminer les cardinaux des classes d'équivalence.

Exercice 44 ★★**Conjugaison**

Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E . Si f et g sont deux éléments de E^E , on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1.
 - a. Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur E^E .
 - b. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?
 - c. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
2. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.
 - a. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les applications $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?
 - b. Les applications \sin et \cos sont-elles conjuguées ?

Exercice 45 ★★★

On définit une relation binaire \mathcal{R} sur \mathbb{R}^2 par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que $\sup A = (0, \sqrt{2})$.

Exercice 46 ★★

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R et R' . On dit que \mathcal{C} est inférieur à \mathcal{C}' si $OO' \leq R' - R$. On note alors $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 47 ★★

Dans \mathbb{N}^* , on considère la relation \mathcal{R} suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad q = p^n$$

1. Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 48 ★

Soient E un ensemble, (F, \leq) un ensemble ordonné et $f : E \rightarrow F$ une application injective. On définit dans E la relation \mathcal{R} par $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur E .