Equations différentielles

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Solution 1

Posons $g(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable puisque f l'est et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$. Comme f est solution de $y' + ay = b$, $f'(-x) + a(-x)f(-x) = b(-x)$ i.e. $-g'(x) - a(x)g(x) = -b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le fait que a et b sont impaires. g vérifie donc la même équation différentielle que f. De plus $g(0) = f(0)$ donc g vérifie également la même condition initiale en 0. Comme il y a unicité de la solution avec condition initiale, c'est donc que $f = g$ i.e. f est paire.

Solution 2

Remarquons que f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque a et b y sont continues.
Si f est T-périodique, on a évidemment $f(0) = f(\mathrm{T})$.
Si $f(0) = f(\mathrm{T})$, posons $g(t) = f(t + \mathrm{T})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme f est solution de (E), $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $f'(t + \mathrm{T}) + a(t + \mathrm{T})f(t + \mathrm{T}) = b(t + \mathrm{T})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme a et b sont T-périodiques, $f'(t + \mathrm{T}) + a(t)f(t + \mathrm{T}) = b(t)$ ou encore $g'(t) + a(t)g(t) = b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. g est donc également solution de (E).
Enfin, $f(0) = g(0)$ donc f et g vérifient la même condition initiale en 0. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $f = g$ i.e. f est T-périodique.

Solution 3

Notons (**E**) l'équation différentielle de l'énoncé et (**H**) son équation homogène associée.
Sur chacun des trois intervalles, l'équation (**E**) équivaut à

$$y' - \frac{x}{1 - x^2}y = \frac{1}{1 - x^2}$$

Puisque

$$-\int -\frac{x}{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(|1 - x^2|)$$

les solutions de (**H**) sur chacun des trois intervalles sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|1 - x^2|}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Résolution sur* $\mathrm{I} =]1, +\infty[$: appliquons la méthode la variation de la constante. Les solutions de (**E**) sont de la forme

  $$x \longmapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|1 - x^2|}}$$

  avec $\lambda : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que

  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{|1 - x^2|}} = \frac{1}{1 - x^2}$$

  c'est-à-dire

  $$\lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

  Les solutions de (**E**) sur I sont donc les fonctions de la forme

  $$x \longmapsto \frac{-\operatorname{argch}(x) + \lambda}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Résolution sur* $\mathrm{I} =]-\infty, -1[$: on raisonne de même et seul le calcul final de la primitive est différent : les solutions de (**E**) sur I sont donc les fonctions de la forme

  $$x \longmapsto \frac{\operatorname{argch}(-x) + \lambda}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Résolution sur* $\mathrm{I} =]-1, 1[$: on raisonne de même et seule la fin du calcul est différent :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Les solutions de $(\mathbf{E})$ sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \frac{\arcsin(x) + \lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 4

---

1. Les solutions de $xy' - \alpha y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^\alpha$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque $f(1) = 1$, f est la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

2. On a dèjà résolu à la question précédente l'équation différentielle homogène associé à l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$. On cherche donc une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme $x \mapsto \lambda(x)x^\alpha$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\lambda'(x)x^\alpha = x^\alpha$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \frac{1}{x}$$

On peut donc choisir $\lambda : x \mapsto \ln x$, ce qui fournit $x \mapsto x^\alpha \ln x$ comme solution particulière.
Les solutions de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto x^\alpha(\ln x + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque $g(1) = 0$, g est la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln x$.

3. On formule l'hypothèse de récurrence suivante

HR(n) : u_n est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^\alpha \ln^n x}{n!}$.

HR(0) est vraie par définition de u_0.
Supposons HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a résolu l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_n$ à la première question. On cherche donc une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme $x \mapsto \lambda(x)x^\alpha$ où λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui conduit à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\lambda'(x)x^\alpha = \frac{x^\alpha \ln^n x}{n!}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \frac{\ln^n x}{n!x}$$

On peut donc choisir $\lambda : x \mapsto \dfrac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!}$, ce qui fournit $x \mapsto \dfrac{x^\alpha \ln^{n+1} x}{(n+1)!}$ comme solution particulière.
Les solutions de l'équation différentielle $xy' - \alpha y = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto x^\alpha\left(\dfrac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!} + \lambda\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque $u_{n+1}(1) = 0$, u_{n+1} est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^\alpha \ln^{n+1} x}{(n+1)!}$. Ainsi HR$(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution 5

Remarquons que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = g$ avec $g = f + f'$. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique alors la méthode de variation de la constante. La fonction $x \mapsto \varphi(x)e^{-x}$ où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de $y' + y = g$ si et seulement si $\varphi'(x)e^{-x} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc choisir $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x e^t g(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $y' + y = g$ est donc la fonction $x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t g(t)\ \mathrm{d}t$. Les solutions de

$y' + y = g$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$. Puisque f est solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il s'agit de prouver que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt = 0$.

Par hypothèse, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ donc $e^t g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$. Puisque $t \mapsto e^t$ est positive et que $\int_0^{+\infty} e^t\,dt$ diverge, on obtient par intégration de relation de comparaison,

$$\int_0^x e^t g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_0^x e^t\,dt\right)$$

Or $\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ donc

$$\int_0^x e^t g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$$

puis

$$e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt = 0$$

puis $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Solution 6

---

1. On résout l'équation caractéristique $X^2 - (1-i)X - 2(1+i) = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8 + 6i$. On extraie une racine carrée δ de Δ par la méthode algébrique. On trouve $\delta = 3 + i$. On en déduit les racines de l'équation $r_1 = 2$ et $r_2 = -1 - i$. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc $t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. Posons $f(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t}$. On a donc $f(0) = \lambda + \mu$. De plus, $f'(t) = 2\lambda e^{2t} - (1+i)\mu e^{-(1+i)t}$. On a donc $f'(0) = 2\lambda - (1+i)\mu$. On résout donc le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda - (1+i)\mu = 1 \end{cases}$ et on trouve $\lambda = \frac{7+i}{10}$ et $\mu = \frac{3-i}{10}$. La solution recherchée est donc $f(t) = \frac{7+i}{10}e^{2t} + \frac{3-i}{10}e^{-(1+i)t}$.

Solution 7

---

f est bien évidemment solution de l'équation différentielle $y + y'' = g$ avec $g = f + f''$. Comme $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène $y + y'' = g$, la méthode de variation des constantes nous dit qu'une solution particulière de $y + y'' = g$ – et notamment f – s'écrit sous la forme $\lambda\cos + \mu\sin$ où λ et μ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\begin{cases} \lambda'\cos + \mu'\sin = 0 \\ -\lambda'\sin + \mu'\cos = g \end{cases}$$

On trouve donc $\lambda' = -g\sin$ et $\mu' = g\cos$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x+\pi) &= \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) + \lambda(x+\pi)\cos(x+\pi) + \mu(x+\pi)\sin(x+\pi)\\
&= \cos(x)\left[\lambda(x) - \lambda(x+\pi)\right] + \sin(x)\left[\mu(x) - \mu(x+\pi)\right]\\
&= -\cos(x)\int_x^{x+\pi} \lambda'(t)\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{x+\pi} \mu'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x+\pi} g(t)\left(\sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi} g(x+t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \text{ car } g \geq 0 \text{ et } \sin \geq 0 \text{ sur } [0,\pi]
\end{aligned}$$

Solution 8

---

1. On a $f' = \dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2} = -q - f^2$. f vérifie donc $f^2 + f' = -q$.

2. Supposons que f s'annule. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On en déduit $y'(x_0) = 0$. Comme $y'' = -qy \leq 0$, y est concave sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $y(x) \leq y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = y(x_0)$. Supposons qu'il existe $x_1 > x_0$ tel que $y(x_1) < y(x_0)$. D'après l'inégalité des pentes,
$$\forall x \geq x_1 \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}$$
ou encore, en posant $c = \dfrac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$
$$y(x) \leq c(x - x_0) + f(x_0)$$
On en déduirait que $\lim\limits_{+\infty} y = -\infty$, ce qui contredirait la stricte positivité de f sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit par l'absurde que $y(x_1) = y(x_0)$ pour tout $x_1 \in]x_0, +\infty[$.
Ainsi y est constante sur $[x_0, +\infty[$ puis $qy = -y'' = 0$ sur $[x_0, +\infty[$ et enfin, comme y ne s'annule pas, q est nulle sur $[x_0, +\infty[$, ce qui contredit l'énoncé. f ne s'annule donc pas.

3. Puisque $f' = -q - f^2$ et que q est à valeurs positives, f' est négative sur $\mathbb{R}_+$: f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme f ne s'annule pas, l'équation différentielle $f^2 + f' = -q$ peut se réécrire $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = q + 1$. Comme q est positive, on a donc $\left(\dfrac{1}{f}\right)' \geq 1$. L'inégalité des accroissements finis donne alors $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(0)} \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit notamment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme f ne s'annule pas, elle est en fait strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

4. On a vu à la question précédente que $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(0)} \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{\frac{1}{f(0)} + x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $f(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Notamment f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme f' est négative, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\int_0^x |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x = f(0) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$$
car on a montré que f est de limite nulle en 0. Ceci prouve que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $q = -f^2 - f'$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur cet intervalle.

5. Comme $f(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on a $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} f^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ par intégration d'une relation de domination. Enfin puisque f a une limite nulle en 0, $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} f' = f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$. Puisque $q = -f^2 - f'$, on en déduit que $\displaystyle\int_{[x,+\infty[} q \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 9

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène
$$(\mathbf{E_H})\,:\,y''-4y'+5y=0$$
est
$$\mathrm{X}^2-4\mathrm{X}+5=0$$
Les racines de cette équation sont $2+i$ et $2-i$. On en déduit que les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sont les fonctions
$$x\mapsto(\lambda\cos x+\mu\sin x)\,e^{2x}$$
avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2. On passe en complexes, autrement dit on considère l'équation différentielle
$$(\mathbf{E}_{\mathbb{C}})\,:\,y''-4y'+5y=e^{(2+i)x}$$
On cherche une solution particulière de la forme $x\mapsto\mathrm{P}(x)e^{(2+i)x}$ où P est un polynôme à coefficients complexes. Une telle fonction est solution si et seulement si
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}''(x)+2i\mathrm{P}'(x)=1$$
Il suffit donc de prendre $\mathrm{P}(x)=\dfrac{1}{2i}x=-\dfrac{i}{2}x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Une solution particulière de $(\mathbf{E}_{\mathbb{C}})$ est donc
$$x\mapsto-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x}$$
Une solution particulière de $(\mathbf{E})$ est donc la partie imaginaire de cette dernière fonction. Or pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x}=-\frac{i}{2}xe^{2x}(\cos x+i\sin x)=\frac{1}{2}xe^{2x}\sin x-\frac{i}{2}xe^{2x}\cos x$$
Une solution particulière de $(\mathbf{E})$ est donc
$$x\mapsto-\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x$$

3. D'après les deux premières questions, les solutions de (E) sont les fonctions
$$x\mapsto-\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x+(\lambda\cos x+\mu\sin x)\,e^{2x}$$
ou encore
$$x\mapsto\left(-\frac{1}{2}x\cos x+\lambda\cos x+\mu\sin x\right)e^{2x}$$
avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

4. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\cos x+\lambda\cos x+\mu\sin x\right)e^{2x}$$
On a ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}\cos x-x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x-\lambda\sin x+\mu\cos x+2\lambda\cos x+2\mu\sin x\right)e^{2x}$$
Le système $\begin{cases}f(0)=1\\f'(0)=2\end{cases}$ équivaut alors à
$$\begin{cases}\lambda=1\\-\frac{1}{2}+\mu+2\lambda=2\end{cases}$$
et donc $\lambda=1$ et $\mu=\dfrac{1}{2}$. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}x\cos x+\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)e^{2x}$$

Solution 10

On a notamment $f''(x_0)+af'(x_0)+bf(x_0)=0$. Puisque $f(x_0)=0$, $f''(x_0)+af'(x_0)=0$.
Puisque f est trois fois dérivable, on peut dériver la relation $f''+af'+bf=0$ de sorte que $f^{(3)}+af''+bf'=0$. Notamment $f^{(3)}(x_0)+af''(x_0)+bf'(x_0)=0$. Puisque $f^{(3)}(x_0)=0$, $af''(x_0)+bf'(x_0)=0$. Ainsi

$$\begin{cases} f''(x_0)+af'(x_0)=0\\ af''(x_0)+bf'(x_0)=0\end{cases}$$

Ainsi $(b-a^2)f'(x_0)=0$ et donc $f'(x_0)=0$ puisque $a^2\neq b$. Finalement, f est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''+ay'+by=0\\ y(x_0)=y'(x_0)=0\end{cases}$$

f est donc la fonction nulle.

Solution 11

1. D'après la formule de Leibniz, en posant $z(t)=(1+t^2)y(t)$ pour $t\in\mathbb{R}$,

$$z''(t)=(1+t^2)y''(t)+4ty'+2y(t)$$

Ainsi l'équation $(1+t^2)y''+4ty'+2y=0$ équivaut à l'équation $z''=0$ dont les solutions sont $t\mapsto a+bt$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Ainsi l'ensemble des solutions de $(1+t^2)y''+4ty'+2y=0$ est $\operatorname{vect}(\varphi_1,\varphi_2)$ avec $\varphi_1 : t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\varphi_2 : \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$.

2. Avec les notation de l'exercice précédent, l'équation $(1+t^2)y''+4ty'+2y=\dfrac{1}{1+t^2}$ équivaut à $z''=\dfrac{1}{1+t^2}$. Une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est arctan et on montre classiquement par intégration par parties qu'une primitive de arctan est $t\mapsto t\arctan(t)-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Cette dernière fonction est une solution particulière de $z''=\dfrac{1}{1+t^2}$. On en déduit que

$$t\mapsto\frac{t\arctan(t)}{1+t^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

est une solution particulière de $(1+t^2)y''+4ty'+2y=\dfrac{1}{1+t^2}$. Les solutions de cette dernière équation différentielle sont alors les fonctions

$$t\mapsto\frac{t\arctan(t)}{1+t^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{a+bt}{1+t^2}$$

avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Solution 12

Une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est $(\cos,\sin)$. On cherche une solution de l'équation avec second membre de la forme $\lambda\cos+\mu\sin$ avec λ et μ deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant :

$$\begin{cases}\lambda'\cos+\mu'\sin=0\\ \lambda'\cos'+\mu'\sin'=\tan\end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases}\lambda'\cos+\mu'\sin=0\\ -\lambda'\sin+\mu'\cos=\tan\end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases}\lambda'=-\dfrac{\sin^2}{\cos}=\cos-\dfrac{1}{\cos}\\ \mu'=\sin\end{cases}$$

On peut choisir $\mu = -\cos$ et puisque

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

on peut choisir

$$\lambda : t \mapsto \sin(t) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)$$

Une solution particulière est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2}\cos(t)\ln\left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)$$

Les solutions sont donc les fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2}\cos(t)\ln\left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 13

1. On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et on résout $xy' = \lambda y$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des solutions est $\mathrm{vect}(f_\lambda)$ avec $f_\lambda : x \mapsto x^\lambda$. Ainsi tout réel λ est valeur propre de φ et f_λ en est un vecteur propre associé.

2. On montre aisément par récurrence que toute solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation différentielle équivaut donc à $\varphi^2(y) = \alpha^2 y$. L'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(\varphi^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_E)$ en notant $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Remarquons que $X^2 - \alpha^2 = (X-\alpha)(X+\alpha)$ et que $X - \alpha$ et $X + \alpha$ sont premiers entre eux si $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, d'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}(\varphi^2 - \alpha^2 \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi + \alpha\,\mathrm{Id}_E) = E_\alpha(\varphi) \oplus E_{-\alpha}(\varphi) = \mathrm{vect}(f_\alpha, f_{-\alpha})$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, on peut tout simplement remarquer que l'équation à résoudre équivaut à $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$. Or les solutions de l'équation différentielle $z' + \frac{1}{x}z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ donc les solutions de $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ sont les primitives de ces dernières solutions, à savoir les fonctions $x \mapsto \lambda\ln(x) + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 14

1. En raisonnant sur le coefficient dominant, on voit qu'on cherche une solution polynomiale de degré 2. On trouve alors que $\varphi t \mapsto t^2 + 1$ est solution de l'équation différentielle homogène $(t^2+1)y'' - 2y = 0$.

2. En posant $y = \varphi z$, l'équation différentielle homogène $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ équivaut à $(t^2+1)(2\varphi' z' + \varphi z'') = 0$ ou encore $(1 + t^2)z'' + 4tz' = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives des solutions de $(1+t^2)x' + 4tx = 0$, c'est-à-dire les primitives des fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{(1+t^2)^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} &= \int_x \frac{(1+t^2-t^2)\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\
&= \int_x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_x t \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \text{par intégration par parties} \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $(1+t^2)z'' + 4tz' = 0$ sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda\left(\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\right) + \mu,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

puis que les solutions de l'équation $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda(1+t^2)\left(\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\right) + \mu(1+t^2),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. On remarque que $t \mapsto -\frac{t}{2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions

$$t \mapsto \lambda(1+t^2)\left(\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\right) + \mu(1+t^2) - \frac{t}{2},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Solution 15

Il suffit de montrer que f s'annule au moins une fois sur tout intervalle du type $[\mathrm{A}, +\infty[$. En effet, pour $\mathrm{A} = 0$, on trouve que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$. Si on suppose que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $\mathbb{R}_+$, disons n fois, et en notant $x_1, \dots, x_n$ les zéros de f sur $\mathbb{R}_+$, on aboutit à une contradiction en choisissant $\mathrm{A} > \max\{x_i \mid 1 \le i \le n\}$.
Soit donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Supposons que f ne s'annule pas sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. Quitte à changer f en $-f$ qui est aussi solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$, on peut supposer $f > 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$.
Comme q est non identiquement nulle et positive, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $q(a) > 0$. Posons $c = \frac{q(a)}{2}$. Par continuité de q, il existe $\alpha > 0$ tel que $q \ge c > 0$ sur $[a-\alpha, a+\alpha]$. On peut supposer $\alpha \le \frac{\mathrm{T}}{2}$ où T est une période de q. Comme q est périodique et positive, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathrm{A}+k\mathrm{T}}^{\mathrm{A}+(k+1)\mathrm{T}} q(t)\,\mathrm{d}t \ge 2\alpha c$$

Supposons que $f' \ge 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. Alors f est croissante sur $[\mathrm{A}, +\infty[$ et donc $f \ge f(\mathrm{A}) > 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(\mathrm{A}+n\mathrm{T}) &= f'(\mathrm{A}) - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+n\mathrm{T}} q(t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge f'(\mathrm{A}) - f(\mathrm{A})\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+n\mathrm{T}} q(\mathrm{T})\,\mathrm{d}t \\ &\ge f'(\mathrm{A}) - 2n\alpha c f(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

Comme $\alpha c f(\mathrm{A}) > 0$, on obtient que $f'(\mathrm{A}+n\mathrm{T}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle $f' \ge 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. Ainsi il existe $\mathrm{B} \ge \mathrm{A}$ tel que $f'(\mathrm{B}) < 0$.
Or $f'' = -qf \ge 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$ donc f' est décroissante sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. En particulier, $f' \le f'(\mathrm{B}) < 0$ sur $[\mathrm{B}, +\infty[$. Pour $x \ge \mathrm{B}$, on a donc

$$f(x) = f(\mathrm{B}) + \int_{\mathrm{B}}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \le f(\mathrm{B}) + f'(\mathrm{B})(x-\mathrm{B})$$

Puisque $f'(\mathrm{B}) < 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit notre hypothèse suivant laquelle $f > 0$ sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. On en déduit donc que f s'annule sur $[\mathrm{A}, +\infty[$.

Solution 16

Comme $(\cos, \sin)$ est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$, les solutions de $y'' + y = f$ sont les fonctions $\lambda\cos + \mu\sin$ où λ et μ sont des fonctions dérivables vérifiant

$$\begin{cases} \lambda'\cos + \mu'\sin = 0 \\ \lambda'\cos' + \mu'\sin' = f \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda' = -f\sin$ et $\mu' = f\cos$. On en déduit que les solutions de $y'' + y = f$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Comme cos et sin sont déjà 2π-périodique, ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$g:\ x \mapsto -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

est 2π-périodique. Or

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+2\pi) = g(x)\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R},\ -\cos(x)\int_0^{x+2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^{x+2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = -\cos(x)\int_0^{x} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^{x} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R},\ -\cos(x)\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t + \sin(x)\int_x^{x+2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{par la relation de Chasles}\\
\iff &\forall x \in \mathbb{R},\ -\cos(x)\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{car } f\sin \text{ et } f\cos \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques}\\
\iff &\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{car } (\cos,\sin) \text{ est une famille libre}
\end{aligned}$$

Solution 17

---

1. On peut trouver une suite injective (x_n) de zéros de f. Comme $[0,1]$ est compact, on peut supposer que (x_n) converge quitte à considérer une suite extraite. Notons $\ell \in [0,1]$ sa limite. Comme deux termes consécutifs x_n et x_{n+1} de cette suite sont distincts, en appliquant le théorème de Rolle, il existe y_n strictement compris entre x_n et x_{n+1} tel que $f'(y_n) = 0$. Par encadrement, (y_n) converge également vers ℓ. Par continuité de f et f', $f(\ell) = f'(\ell) = 0$.

2. Soit f une solution de (E) s'annulant une infinité de fois sur $[0,1]$. D'après la question précédente, il existe $\ell \in [0,1]$ tel que f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ f(\ell) = f'(\ell) = 0 \end{cases}$. La fonction nulle est également solution de ce problème de Cauchy. Par unicité de la solution de ce problème, f est nulle. Ainsi l'unique solution de (E) s'annulant une infinité de fois est la fonction nulle.

Solution 18

---

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{vect}(\cos,\sin)$. Si $n \neq 1$, $t \mapsto \dfrac{1}{1-n^2}\cos(nt)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
Si $n = 1$, on passe en complexe. On cherche une solution de $y'' + y = e^{it}$. Comme i est solution de l'équation caractéristique, on recherche une solution de la forme ate^{it} et on trouve $a = \dfrac{1}{2i}$. Ainsi une solution de $y'' + y = \cos t$ est $t \mapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2i}te^{it}\right) = \dfrac{1}{2}t\sin t$.

2. On pose
$$f : t \mapsto a_0 + \frac{a_1}{2}t\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$
Si on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$ pour $n \geq 2$. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| \leq \dfrac{|a_n|}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(|a_n|)$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n'(t)| \leq \dfrac{n|a_n|}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(|a_n|)$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n''(t)| \leq \dfrac{n^2|a_n|}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(|a_n|)$.

   Ainsi $\sum f_n$, $\sum f_n'$ et $\sum f_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ (en fait, on a seulement besoin de la convergence simple de $\sum f_n$ et $\sum f_n'$). On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde s'obtient en dérivant terme à terme. D'après la première question, f est bien solution de l'équation différentielle $y'' + y = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\cos(nt)$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $f + \mathrm{vect}(\cos,\sin)$.

Solution 19

---

1. Soit h fonction développable en série entière vérifiant $h(0) = 1$. Il existe donc $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tel que

$$\forall x \in]-R, R[,\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors h est solution de $xy'' + y' + y = 0$ sur $]-R, R[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on a $a_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence évidente, on en déduit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $a_0 = h(0) = 1$. Ainsi $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. Le rayon de convergence de cette série entière est infini donc h est solution de $xy'' + y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On va utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Tout d'abord, $h(0) = 1 > 0$. On veut ensuite déterminer le signe de $h(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2^{n+1}/((n+1)!)^2}{2^n/(n!)^2} = \frac{2}{(n+1)^2}$$

la suite de terme général $\dfrac{2^n}{(n!)^2}$ est strictement décroissante à partir du rang 1. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées pour affirmer que $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2}$ est du signe de son premier terme, c'est-à-dire strictement négatif. Par conséquent

$$h(2) = 1 - 2 + 1 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} < 0$$

Comme h est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!(n+1)!}$$

Soit $x \in]0, 2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!(n+2)!}}{\frac{x^n}{n!(n+1)!}} = \frac{x}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{x}{2} < 1$$

La suite de terme général $\dfrac{x^n}{n!(n+1)!}$ est donc strictement décroissante. En vertu du critère spécial des séries alternées, $h'(x)$ est du signe du premier terme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!(n+1)!}$, c'est-à-dire $h'(x) < 0$. Ainsi h est strictement décroissante sur $]0, 2[$. Comme h est également continue sur $[0, 2]$, on en déduit que h s'annule exactement une fois sur $]0, 2[$.

Solution 20

---

1. Sur I, l'équation différentielle (H) équivaut à $y'' + \dfrac{4}{x}y' + \left(\dfrac{2}{x^2} - 1\right)y = 0$, qui est une équation différentielle différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus. On en déduit que $S_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

2. Soit f une éventuelle solution de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E) équivaut alors sur I à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1$$

ou encore à

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 1$$

et finalement à

$$2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}\right] x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, ceci équivaut à $2a_0 = 1$, $6a_1 = 0$ et $(n-1)(n-2)a_n - a_{n-2} = 0$ pour tout entier $n \geq 2$. On en déduit immédiatement que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{2n} = a_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} 2k + 2 = \frac{1}{(2n+2)!}$$

Par conséquent,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

La série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ possède bien un rayon de convergence infini (en utilisant la règle de d'Alembert par exemple). Ce qui précède montre alors que f est bien l'unique solution de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$$

3. Comme f et g sont solutions de (E), $f - g$ est solution de (H). De plus, $f - g$ et h ne sont pas colinéaires et $\mathrm{S_I(H)}$ est de dimension E donc $\mathrm{S_I(H)} = \operatorname{vect}(f-g, h)$. Par conséquent, $\mathrm{S_I(E)} = f + \operatorname{vect}(f-g, h)$.

4. Soit $y \in \mathrm{S}_{\mathbb{R}}(\mathrm{H})$. Alors y est a fortiori solution de (H) sur I. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ y(x) = \frac{\alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x}{x^2} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \mathcal{O}(1)$$

Comme y est solution de (H) sur $\mathbb{R}$, elle est notamment continue en 0 et donc bornée au voisinage de 0. Ceci implique $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\mathrm{S}_{\mathbb{R}}(\mathrm{H}) = \{0\}$ puis $\dim \mathrm{S}_{\mathbb{R}}(\mathrm{H}) = 0$.

Solution 21

---

1. Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence R. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Alors f est solution de (E) sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ 4\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 9\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ 4\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 9\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

ou encore à

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ -2a_1 + (8a_1 - 4a_2)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n+1)(4n-2)a_{n+1} + 9a_{n-2}\right] x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, ceci équivaut à $-2a_1 = 0$, $8a_1 - 4a_2 = 0$ et $(n+1)(4n-2)a_{n+1} + 9a_{n-2} = 0$ pour tout $n \geq 2$ ou encore $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3}$ pour tout $n \geq 3$. On en déduit que $a_1 = a_2 = 0$. Il s'ensuit avec la relation de récurrence que $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n(2n-1)a_{3n} = -a_{3(n-1)}$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{3n} = (-1)^n a_0 \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^n (2k-1)} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que la série entière $\sum \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{3n}$ est bien de rayon de convergence infini. L'ensemble des solutions développables en série entière est donc $\operatorname{vect}(\varphi)$ où

$$\varphi :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n}$$

Remarquons que pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^{3/2})^{2n} = \cos\left(x^{3/2}\right)$$

et que pour $x < 0$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{(2n)!} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} (-x)^{3n} = \operatorname{ch}\left((-x)^{3/2}\right)$$

2. On pose $y = z\varphi$. Alors, sur un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}_+^*$ où φ ne s'annule pas :

$$\begin{aligned}
& 4xy'' - 2y' + 9x^2 y = 0 \\
\iff\quad & 4xz\varphi'' + 8xz'\varphi' + 4z''\varphi - 2z\varphi' - 2z'\varphi - 9x^2 z\varphi = 0 \\
\iff\quad & z(4x\varphi'' - 2\varphi' - 9x^2\varphi) + 8xz'\varphi' + 4xz''\varphi - 2z'\varphi = 0 \\
\iff\quad & 2x\varphi z'' + (4x\varphi' - \varphi)z' = 0 \\
\iff\quad & z'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{2x}\right) z' = 0
\end{aligned}$$

Comme une primitive de $x \mapsto 2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{1}{2x}$ sur J est $x \mapsto 2\ln(\varphi(x)) - \frac{1}{2}\ln(x)$. L'équation différentielle précédente équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z'(x) = \frac{\lambda\sqrt{x}}{\cos^2(x^{3/2})}$ pour $x \in \mathrm{J}$. On peut alors choisir $z(x) = \tan(x^{3/2})$ par exemple i.e. $y(x) = \sin(x^{3/2})$.
On vérifie alors que $\psi :\ x \mapsto \sin(x^{3/2})$ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme (φ, ψ) est libre et que l'équation différentielle (E) est une équation différentielle résolue linéaire homogène d'ordre 2, l'ensemble de ses solutions est $\operatorname{vect}(\varphi, \psi)$.

3. Posons $z(t) = y(t^{3/2})$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ i.e. $y(x) = z(x^{2/3})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z l'est et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y(x) = z(x^{3/2}) \qquad y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2}) \qquad y''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}xz''(x^{3/2})$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2 y(x) = 0$$

équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2}) = 0$$

ou encore à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(t) + z(t) = 0$$

L'ensemble des solutions de cette dernière équation différentielle est $\operatorname{vect}(t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t))$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\operatorname{vect}(x \mapsto \cos(x^{3/2}), x \mapsto \sin(x^{3/2}))$.

Systèmes différentiels

Solution 22

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$, il s'agit de résoudre l'équation différentielle $X' = AX$. Ces solutions sont de la forme $t \mapsto \exp(tA)X_0$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Procédons à la réduction de A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -6 & 0 \\ 3 & X+6 & 0 \\ 3 & 6 & X+5 \end{vmatrix} = (X+5)\begin{vmatrix} X-3 & 6 \\ 3 & X+6 \end{vmatrix} = X(X+3)(X+5)$$

Ainsi, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -3, -5\}$. Des vecteurs propres associés aux valeurs propres $0, -3, -5$ sont respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$. En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$. L'ensemble des solutions de ce système est $\mathrm{vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$ avec $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 : t \mapsto e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_3 : t \mapsto e^{-5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que l'ensemble des solutions du système $X' = AX$ est $\mathrm{vect}(X_1, X_2, X_3)$, avec $X_1 = PY_1$, $X_2 = PY_2$ et $X_3 = PY_3$, c'est-à-dire $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 : t \mapsto e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_3 : t \mapsto e^{-5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution 23

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, le système équivaut à $X' = AX$. On trouve

$$\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1) = (X-2)(X+j)(X+\overline{j})$$

Ainsi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$$

En étudiant les sous-espaces propres de A, on montre que $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & j & \overline{j} \\ 0 & -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $Y = P^{-1}X$ de sorte que le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = DY$. Les solutions de ce système sont les fonctions

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{-jt} \nu e^{-\overline{j}t} \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$. On en déduit que les solutions de $X' = AX$ à valeurs complexes sont les fonctions

$$X : t \mapsto P\begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{-jt} \nu e^{-\bar{j}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda e^{2t} + j\mu e^{-jt} + \bar{j}\nu e^{-\bar{j}t} \\ -i\sqrt{3}\mu e^{-jt} + i\sqrt{3}\nu e^{-\bar{j}t} \\ \lambda e^{2t} + \mu e^{-jt} + \nu e^{-\bar{j}t} \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$.
Si l'on souhaite les solutions à valeurs réelles, on procède différemment. On rappelle que

$$\chi_A = (X-2)(X^2 - X + 1)$$

de sorte que

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - A + I_3)$$

On rappelle que $E_2(A) = \operatorname{vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche alors une base de $\operatorname{Ker}(A^2 - A + I_3)$. En prenant par exemple, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = AU_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien $\operatorname{Ker}(A^2 - A + I_3) = \operatorname{vect}(U_2, U_3)$. De plus, $AU_3 = A^2U_2 = AU_2 - U_2 = U_3 - U_2$. Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = PBP^{-1}$. En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX$ équivaut à $Y' = BY$ ou encore, en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y_1' - 2y_1 = 0 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \\ y_3' = -y_2' \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les triplets (y_1, y_2, y_3) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = ae^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(b\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

On en déduit les solutions de $X' = AX$ via $X = PY$. On laise au lecteur le soin d'chever ce calcul ignoble.

Solution 24

---

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est

$$\chi_{A(t)} = X^2 - \operatorname{tr}(A(t))X + \det(A(t)) = X^2 - 2X + (1 - t^2) = (X - 1 - t)(X - 1 + t)$$

Les valeurs propres de $A(t)$ sont donc $1 + t$ et $1 - t$.

2. On remarque $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1+t$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-t$. Ainsi en posant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}(t)\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = \mathrm{D}(t)$$

3. En posant $\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$ le système équivaut à $\mathrm{X}' = \mathrm{D}(t)\mathrm{X}$. Si on note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système équivaut à $\begin{pmatrix} x' & = (1+t)x \\ y' & = (1-t)y \end{pmatrix}$. On en déduit que les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{D}(t)\mathrm{X}$ sont les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{Y}$ sont donc les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} \\ \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{t+t^2/2} + \mu e^{t-t^2/2} \\ -2\lambda e^{t+t^2/2} - \mu e^{t-t^2/2} \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 25

Première version

On écrit le système sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$. On calcule

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\lambda + \det(\mathrm{A}) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Comme χ_{A} est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{4, -1\}$. On trouve sans peine que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le système $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$ équivaut donc à $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY} + \mathrm{C}(t)$ avec $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(t)$. On trouve sans peine $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{C}(t) = \begin{pmatrix} 4t - e^t \\ -2t + e^t \end{pmatrix}$. En posant $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le système $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY} + \mathrm{C}(t)$ équivaut à

$$\begin{cases} u' - 4u = 4t - e^t \\ v' + v = -2t + e^t \end{cases}$$

On résout séparément ces deux équations différentielles. Les solutions de la première sont les fonctions

$$t \mapsto ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t,\ a \in \mathbb{R}$$

tandis que les solutions de la seconde sont les fonctions

$$t \mapsto be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t,\ b \in \mathbb{R}$$

On en déduit que les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto \mathrm{P}\begin{pmatrix} ae^{4t} - t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t \\ be^{-t} - 2t + 2 + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{-t} - 3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ ae^{4t} + 2be^{-t} - 5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

Deuxième version

On résout d'abord l'équation homogène. On trouve comme précédemment que $\mathrm{X}_1 : t \mapsto e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_2 : t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base du sous-espace vectoriel des solutions du système homogène. On recherche une solution particulière du système avec second membre. On cherche donc une solution de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ où λ_1 et λ_2 sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e^{4t} + \lambda_2'(t)e^{-t} = 2t \\ \lambda_1'(t)e^{4t} + 2\lambda_2'(t)e^{-t} = e^t \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = 4te^{-4t} - e^{-3t} \\ \lambda_2'(t) = e^{2t} - 2te^t \end{cases}$$

A l'aide d'intégration par parties, on peut choisir

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = -te^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \lambda_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - 2te^t + 2e^t \end{cases}$$

On en déduit donc qu'une solution de l'équation avec second membre est

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -3t + \frac{7}{4} + \frac{5}{6}e^t \\ -5t + \frac{15}{4} + \frac{4}{3}e^t \end{pmatrix}$$

Solution 26

On écrit le système sous la forme $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A = I_2 + N$ où $N = A - I_2$ vérifie $N^2 = 0$. Comme I_2 et N commutent,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \exp(tI_2)\exp(tN) = e^t(I_2 + tN) = e^t \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ -2t & 1 + 2t \end{pmatrix}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2t \\ -2t & 1 + 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(1 - 4t) \\ -e^t(1 + 4t) \end{pmatrix}$$

Solution 27

1. Remarquons que $\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On cherche trois vecteurs C_1, C_2 et C_3 tels que $AC_1 = 2C_1$, $AC_2 = 2C_2 + C_1$ et $AC_3 = 2C_3$. On choisit un vecteur C_2 qui n'est pas dans $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$, par exemple $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose ensuite $C_1 = AC_2 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $C_1 \in \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ i.e. $AC_1 = 2C_1$ (c'est forcément le cas puisque $(A - 2I_3)^2 = 0$). On choisit ensuite un dernier vecteur C_3 dans $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ non colinéaire à C_1, par exemple, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $A = PTP^{-1}$.

2. En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, le système $X'(t) = AX(t)$ équivaut à $Y'(t) = TY(t)$. Les solutions de ce système sont les fonctions

$$t \mapsto \exp(tT)Y_0,\ Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Or $T = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et N commutent et $N^2 = 0$ de sorte que

$$\exp(tT) = e^{2t}(I_3 + tN) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto P\exp(tT)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

ou encore

$$\begin{cases} f(t) = ae^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ g(t) = -ae^{2t} - bte^{2t} + ce^{2t} \\ h(t) = ae^{2t} + bte^{2t} \end{cases}$$

Solution 28

---

1. Evident.

2. **a.** Comme $X \in \mathcal{S}$, $X' = AX$. Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AU$ est linéaire, AX est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(AX)' = AX' = A(AX)$. Ainsi $AX \in \mathcal{S}$.

b. D'après la question précédente, $AV = \begin{pmatrix} -\sin \\ -\cos \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda V + \mu AV = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi (V, AV) est libre. Comme $\dim \mathcal{S} = 2$, (V, AV) est une base de $\mathcal{S}$.

3. **a.** V et AV sont clairement bornées sur $\mathbb{R}$. Comme (V, AV) est une base de $\mathcal{S}$, $X \in \mathcal{S}$ est une combinaison linéaire des deux applications bornées V et AV. Ainsi X est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Posons $X = PY$. Comme expliqué précédemment, X est de classe $\mathcal{C}^1$ et $X' = PY'$. Alors

$$X' = PY' = PMY = PMP^{-1}X = AX$$

D'après la question précédente, X est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme l'application $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}U$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est continue et il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ N(P^{-1}U) \leq CN(U)$ où N désigne une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notamment,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ N(Y(t)) = N(P^{-1}X(t)) \leq CN(X(t))$$

Comme X est bornée sur $\mathbb{R}$, Y l'est également.

4. Le produit scalaire est bilinéaire et X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $f : t \mapsto (X(t) \mid X(t))$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) &= (X'(t) \mid X(t)) + (X(t) \mid X'(t)) \\ &= 2(X(t) \mid X'(t)) = 2X(t)^\top X'(t) \\ &= 2X(t)^\top (A + b(t)I_2)X(t) \\ &= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)X(t)^\top X(t) \\ &= 2X(t)^\top AX(t) + 2b(t)f(t)\end{aligned}$$

Or la matrice A est antisymétrique donc pour tout $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en remarquant que $U^\top AU$ est un scalaire,

$$U^\top AU = (U^\top AU)^\top = U^\top A^\top U = -U^\top AU$$

puis $U^\top AU = 0$.

> **Remarque.** On peut aboutir au même résultat en calculant directement $U^\top AU$ à l'aide des coefficients de A et U mais il est intéressant de savoir que le résultat est valide pour toute matrice antisymétrique de taille quelconque.

Finalement, on obtient bien

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2b(t)f(t)$$

5. Posons $B : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^t b(u)\,du$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, B est une primitive de b de sorte que $f(t) = f(0)\exp(2B(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme b est intégrable sur $\mathbb{R}$, les intégrales $\int_{-\infty}^0 |b(u)|\,du$ et $\int_0^{+\infty} |b(u)|\,du$ convergent et, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |B(t)| &\leq \int_0^t |b(u)|\,du \leq \int_0^{+\infty} |b(u)|\,du \\ \forall t \in \mathbb{R}_-,\ |B(t)| &\leq \int_t^0 |b(u)|\,du \leq \int_{-\infty}^0 |b(u)|\,du\end{aligned}$$

La fonction B est donc bornée. Par conséquent, f est bornée puis X également.

Solution 29

---

1. **a.** On a clairement $f(a) = C$. Par théorème fondamental de l'analyse et par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et

$$\forall t \in [a,b],\ f'(t) = v(t)\left(u(t) - C - \int_a^t v(s)\,ds\right)\exp\left(-\int_a^t v(s)\,ds\right) \leq 0$$

Ainsi f est décroissante sur $[a, b]$.

b. Notamment, $f(t) \leq f(a) = K$ pour tout $t \in [a, b]$. Par conséquent,

$$\forall t \in [a,b],\ u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)\,ds \leq C\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

> **Remarque.** Il s'agit du lemme de Grönwall.

2. **a.** x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$ et le produit scalaire est une forme bilinéaire donc $x : t \mapsto \langle x(t), x(t)\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g'(t) = 2\langle x(t), x'(t)\rangle$$

D'arès l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g'(t) \leq 2\|x(t)\| \cdot \|x'(t)\| = 2\|x(t)\| \cdot \|\mathrm{A}(t)x(t)\|$$

Mais, par définition d'une norme subordonnée,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \|\mathrm{A}(t)x(t)\| \leq |||\mathrm{A}(t)||| \cdot \|x(t)\|$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g'(t) \leq 2|||\mathrm{A}(t)||| \cdot \|x(t)\|^2 = 2|||\mathrm{A}(t)||| \cdot g(t)$$

b. En intégrant, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) \leq g(0) + 2\int_0^t |||\mathrm{A}(s)||| \cdot g(s)\ \mathrm{d}s$$

En utilisant la question précédente avec $u = g$, $\mathrm{C} = g(0)$ et $v = 2|||\mathrm{A}|||$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \|x(t)\|^2 = g(t) \leq 2g(0)\int_0^t |||\mathrm{A}(s)|||\ \mathrm{d}s \leq 2g(0)\int_0^{+\infty} |||\mathrm{A}(s)|||\ \mathrm{d}s$$

On en déduit bien que x est bornée.

Changement de variable

Solution 30

---

1. **a.** Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln x)$.
Ainsi f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 f''(x) - xf'(x) - 3f(x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2\left(\frac{g''(\ln x)}{x^2} - \frac{g'(\ln x)}{x^2}\right) - x\frac{g'(\ln x)}{x} - 3g(\ln x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g''(\ln x) - 2g'(\ln x) - 3g(\ln x) = x^4 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R}\ g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\
\iff & g \text{ solution de } (\mathrm{E}')
\end{aligned}$$

avec

$$(\mathrm{E}') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

b. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E′) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de (E′) est $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$. Les solutions de (E′) sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. **a.** Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = g(\ln(-x))$.
Ainsi f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
& f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}_-^* \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x^2 f''(x) - xf'(x) - 3f(x) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x^2\left(\frac{g''(\ln(-x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(-x))}{x^2}\right) - x\frac{g'(\ln(-x))}{x} - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ g''(\ln(-x)) - 2g'(\ln(-x)) - 3g(\ln(-x)) = x^4 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R}\ g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t} \\
\iff & g \text{ solution de } (\mathrm{E}')
\end{aligned}$$

avec

$$(\mathrm{E}') : y'' - 2y' - 3y = e^{4t}$$

b. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E′) sont les fonctions $t \mapsto \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Une solution particulière de (E′) est $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t}$. Les solutions de (E′) sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

3. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 + \frac{\mu}{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 + \frac{\beta}{x}$

f doit être continue en 0 et en particulier doit avoir une limite finie en 0, ce qui impose $\mu = \beta = 0$. On a donc alors $f(0) = 0$.
Réciproquement, toute fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
De plus f est bien deux fois dérivable en 0 car

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0$$

et on a donc $f'(0) = f''(0) = 0$.
Enfin

$$0^2 f''(0) - \mathrm{O}f'(0) - 3f(0) = 0^4$$

ce qui prouve que f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions f définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^4 + \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{5}x^4 + \alpha x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

Solution 31

---

1. On recherche une solution polynomiale de degré 2. On trouve sans difficulté $x \mapsto x^2 + \frac{1}{9}$.

2. On pose $z(t) = y(x) = y(e^t)$ ou encore $y(x) = z\ln(x)$. On trouve sans peine que y est solution de $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution de $4z'' - 12z' + 9z = 0$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation homgène associée $4z'' - 12z' + 9z = 0$ admet pour polynôme caractéristique $4\mathrm{X}^2 - 12\mathrm{X} + 9 = (2\mathrm{X} - 3)^2$ donc ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{\frac{3t}{2}}$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (\mathrm{A}\ln(x) + \mathrm{B})x^{\frac{3}{2}}$. D'après la première question, les solutions de l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (\mathrm{A}\ln(x) + \mathrm{B})x^{\frac{3}{2}}$$

avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

3. En effectuant cette fois-ci le changement de variable $x = -e^t$, on trouve de la même manière que les solutions de l'équation différentielle $4x^2y'' - 8xy' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto x^2 + \frac{1}{9} + (\mathrm{A}\ln(-x) + \mathrm{B})(-x)^{\frac{3}{2}}$$

avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

Problèmes de raccord

Solution 32

On trouve sans difficulté que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \lambda_+ e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $y(x) = \lambda_- e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$.
y doit être continue en 0, ce qui impose λ_- (sinon y admet une limite infinie en 0^-. Ceci impose de plus $y(0) = 0$ puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Réciproquement soit y telle que $y(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $y(x) = \lambda e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
y est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
De plus,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \lambda \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \to +\infty} \lambda u e^{-u} = 0$$

Ainsi y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. Enfin, $0^2 y'(0) - y(0) = 0$ donc y est solution sur $\mathbb{R}$.
En conclusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 33

Résolvons tout d'abord sur un intervalle $\mathrm{I}_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
L'équation homogène peut s'écrire $y' - y \cot x = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type $x \mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|}$ où encore $x \mapsto \lambda \sin x$ (en faisant «rentrer» la valeur aboslue dans la constante).
On remarque que cos est solution particulière de l'équation avec second membre (on peut également utiliser la variation de la constante si la solution ne saute pas aux yeux).
Les solutions sur I_k sont donc les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe une famille $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de réels telle que $y(x) = \cos x + \lambda_k \sin x$ pour $x \in \mathrm{I}_k$.
y doit être continue en les $k\pi$, ce qui impose $y(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.
De plus,

$$\lim_{x \to (k\pi)^-} \frac{y(x) - y(k\pi)}{x - k\pi} = (-1)^k \lambda_{k-1}$$

et

$$\lim_{x \to (k\pi)^+} \frac{y(x) - y(k\pi)}{x - k\pi} = (-1)^k \lambda_k$$

Comme y doit être dérivable en $k\pi$, on a donc $\lambda_{k-1} = \lambda_k$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \cos x + \lambda \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont bien solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
En conlcusion, les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 34

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation homogène peut s'écrire $y' - \frac{1}{x} y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\ln x}$ ou encore les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La variation de la constante fournit la solution particulière $x \mapsto x \ln x$. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions $x \mapsto x \ln x + \lambda x$.

Le même raisonnement prouve que les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto x\ln(-x) + \lambda x$.
Soit y une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$. Ce qui précède justifie l'existence de deux constantes réelles λ_+ et λ_- telles que

$$y(x) = \begin{cases} x\ln x + \lambda_+ x & \text{si } x > 0 \\ x\ln(-x) + \lambda_- x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y est nécessairement continue en 0, ce qui impose $y(0) = 0$. Mais alors

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = -\infty$$

y n'est donc pas dérivable en 0.
On en conclut qu'il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle de l'énoncé.

Solution 35

1. Posons $z(t) = y(x) = y(\sqrt{t})$. z est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $y(x) = z(x^2)$ et donc $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que y est solution de (E) si et seulement si $4z'' - z = 0$. Comme les solutions de $4z'' - z = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{2}} + \mu e^{-\frac{x}{2}}$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. On remarque que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc également les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Ce qui précède montre qu'il existe des constantes réelles $\lambda_+, \mu_+, \lambda_-, \mu_-$ telles que $y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_- e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   La continuité de y en 0 impose $\lambda_+ + \mu_+ = \lambda_- + \mu_-$.
   On a $y'(x) = \begin{cases} x\lambda_+ e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_+ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ x\lambda_- e^{\frac{x^2}{2}} - x\mu_- e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Ainsi
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lambda_+ - \mu_+$$
   et
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = \lambda_- - \mu_-$$
   Comme y' est dérivable en 0, $\lambda_+ - \mu_+ = \lambda_- - \mu_-$.
   On en déduit que $\lambda_+ = \lambda_-$ et $\mu_+ = \mu_-$.
   Réciproquement, les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont bien solutions de (E). Ce sont donc exactement les solutions de (E).

Solution 36

Le coefficient de y' pouvant s'annuler, on parle d'équation différentielle *non normalisée*.
On résout donc dans un premier temps sur les plus grands intervalles sur lesquels ce coefficient ne s'annule pas, en l'occurence $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$
L'équation (E) équivaut alors à $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{e^{2t}}{t}$.
Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda\frac{e^t}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
La méthode de variation de la constante fournit $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t}$ comme solution particulière.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \lambda\frac{e^t}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$ Le même raisonnement montre que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont également les fonctions $t \mapsto \frac{e^{2t}}{t} + \mu\frac{e^t}{t}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

Résolution sur $\mathbb{R}$
Soit y une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$: il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ y(t) = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{t} + \lambda\frac{e^t}{t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{e^{2t}}{t} + \mu\frac{e^t}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Etude de la continuité en 0
y doit être continue en 0. Elle doit donc avoir la même limite finie à gauche et à droite en 0. Or pour $t > 0$

$$y(t) = \frac{e^t(e^t + \lambda)}{t}$$

Pour que y ait une limite finie à droite en 0, il faut donc que $\lambda = -1$. De même, pour que y ait une limite finie à gauche en 0, il faut également que $\mu = -1$. Supposons dorénavant ces conditions vérifiées.
On prouve que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t(e^t-1)}{t} = 1$ en utilisant par exemple les développements limités. La continuité de y en 0 implique donc $y(0) = 1$.
Étude de la dérivabilité en 0
On a donc $y(t) = \begin{cases} \frac{e^t(e^t-1)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. On prouve finalement que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \frac{3}{2}$, ce qui prouve que y est dérivable en 0.
Conclusion y est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, elle est dérivable en 0 et $0 \times y'(0) + (1-0) \times y(0) = 1 = e^{2\times 0}$ donc y est bien l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution 37

Plaçons nous d'abord sur $]1, +\infty[$. L'équation différentielle équivaut à

$$y' - \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right)y = 0$$

Comme une primitive de $x \mapsto \frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln x}$ sur $]1, +\infty[$ est évidemment $x \mapsto 3\ln(x) + \ln(\ln x)$, les solutions de cette équation différentielle sur $]1, +\infty$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^3 \ln(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On prouve que les solutions sur $]0, 1[$ sont également les fonctions $x \mapsto \mu x^3 \ln(x)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
Soit f une éventuelle solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $f(1) = 0$ et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^3 \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \mu x^3 \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Réciproquement, vérifions qu'une telle fonction est effectivement solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est déjà solution sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Il s'agit donc de montrer que f est dérivable en 1. Or

$$f'(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 + 3x^2 \ln x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \mu(x^2 + 3x^2 \ln x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 0$ donc f est dérivable en 1 d'après la théorème de la limite de la dérivée. Finalement les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x\ln(x)y' - (3\ln(x) + 1)y = 0$ sont les fonctions f telles que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^3 \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \mu x^3 \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Wronskien

Solution 38

---

1. Simple calcul.

2. On sait qu'il existe une solution φ_2 telle que (φ_1, φ_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions. Notons $w = \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'$ le wronskien de ces deux solutions. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ w'(t) = \varphi_1''(t)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2''(t) = \varphi_2(t)\left(-2\frac{\varphi_1'(t)}{t} - \varphi_1(t)\right) - \left(-2\frac{\varphi_2'(t)}{t} - \varphi_2(t)\right)\varphi_1(t) = -2\frac{w(t)}{t}$$

On en déduit qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) = \dfrac{\mathrm{C}}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (φ_1, φ_2) est libre, w ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et, quitte à multiplier φ_2 par un scalaire non nul, on peut supposer $\mathrm{C} = 1$ i.e. $w(t) = \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Or $\varphi_1(t) = \dfrac{\sin t}{y}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{t^2} = w(t) = \varphi_1'(t)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\varphi_2(t) - \frac{\sin t}{t}\varphi_2'(t)$$

Ainsi φ_2 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle du premier ordre

$$-\frac{\sin t}{t}y' + \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}y = \frac{1}{t^2}$$

ou encore sur $]0, \pi[$,

$$y' - \left(\operatorname{cotan} t - \frac{1}{t}\right)y = -\frac{1}{\sin t}$$

Comme une primitive de $t \mapsto \operatorname{cotan} t - \dfrac{1}{t}$ sur $]0, \pi[$ est $t \mapsto \ln(\sin t) - \ln(t)$, les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{\lambda \cos t}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière : on cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)\sin t}{t}$, ce qui donne $\dfrac{\lambda'(t)\sin t}{t} = -\dfrac{1}{t\sin t}$ ou encore $\lambda'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$. On peut alors choisir $\lambda(t) = \operatorname{cotan} t$, ce qui fournit $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ comme solution particulière de l'équation différentielle

$$y' - \left(\operatorname{cotan} t - \frac{1}{t}\right)y = -\frac{1}{\sin t}$$

On vérifie alors que $\varphi_2 : t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est bien solution de l'équation différentielle initiale (E). Comme (φ_1, φ_2) est manifestement libre, on peut dire que l'ensemble des solutions de (E) est l'espace vectoriel $\operatorname{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Remarque. On peut faire beaucoup plus simple en remarquant que (E) équivaut à $(tx)'' + (tx) = 0$. Comme l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est $\operatorname{vect}(\sin, \cos)$, on retrouve directement que l'ensemble des solutions de (E) est $\operatorname{vect}\left(t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}, t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}\right)$.

Solution 39

1. Remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\ \mathrm{d}t = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Comme f est bornée, $qf \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(q)$. Mais comme q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, qf l'est également. Notamment l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Ce qui précède montre que f' admet une limite ℓ en $+\infty$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$ qui est également bornée et solution de (E), on peut supposer $\ell > 0$. Par définition de la limite, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x) \geq \dfrac{\ell}{2}$ pour tout $x \geq \mathrm{A}$. Mais alors

$$\forall x \geq \mathrm{A},\ f(x) = f(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^x f'(t)\ \mathrm{d}t \geq f(\mathrm{A}) + \frac{\ell}{2}(x - \mathrm{A})$$

puis $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, ce qui contredit le caractère borné de f. Ainsi $\ell = 0$.

2. On constate que

$$w' = fg'' - f''g = -qfg + qfg = 0$$

Ainsi w est constant sur $\mathbb{R}_+$. Mais f et g sont bornées et f' et g' ont une limite nulle en $+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} w = 0$. Comme w est constant, w est nul sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f et g sont liées.
Ce qui précède montre que l'espace vectoriel des solutions bornées de (E) est de dimension au plus 1. Comme l'espace vectoriel des solutions de (E) est de dimension 2, (E) possède nécessairement des solutions non bornées.

Solution 40

---

1. **a.** On a $\mathrm{W}' = u''v - uv'' = (q-p)uv$.

b. Supposons que v ne s'annule pas sur $[a,b]$. Comme u et v sont continues, elles restent de signe constant respectivement sur $]a,b[$ et $[a,b]$. Quitte à changer u en $-u$ et/ou v en $-v$ (qui sont aussi solution des mêmes équations différentielles que u et v), on peut supposer $u > 0$ sur $]a,b[$ et $v > 0$ sur $[a,b]$. Alors $\mathrm{W}' \geq 0$ sur $[a,b]$ et donc W est croissante sur $]a,b[$. De plus, $\mathrm{W}(a) = u'(a)v(a)$ et $\mathrm{W}(b) = u'(b)v(b)$. On a $u'(a) \geq 0$ et $u'(b) \leq 0$ en considérant la limite du taux de variation de u en a^+ et b^-. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on ne peut avoir $u'(a) = 0$ ou $u'(b) = 0$ sinon u serait nulle. Par conséquent, $u'(a) > 0$ et $u'(b) < 0$. Ainsi $\mathrm{W}(a) > 0$ et $\mathrm{W}(b) < 0$ ce qui contredit la décroissance de W. On en déduit que v s'annule sur $[a,b]$.

2. **a.** Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $u : x \mapsto \sin(\mathrm{M}(x-a))$ vérifie $u'' + \mathrm{M}^2 u = 0$. De plus, u s'annule en a et $a + \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$ mais ne s'annule pas sur $\left]a, a+\dfrac{\pi}{\mathrm{M}}\right[$. On déduit de la question précédente que f s'annule sur $\left[a, a+\dfrac{\pi}{\mathrm{M}}\right]$.

b. Soit $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}\right[$. La fonction $v : x \mapsto \sin(\mathrm{M}(x-a+\varepsilon))$ vérifie $v'' + \mathrm{M}^2 v = 0$. La question précédente montre que v s'annule sur $[a,b]$. Comme v ne s'annule pas sur $\left[a, \dfrac{a}{+}\dfrac{\pi}{\mathrm{M}} - \varepsilon\right[$, on a $b \geq a + \dfrac{\pi}{\mathrm{M}} - \varepsilon$ i.e. $b - a \geq \dfrac{\pi}{\mathrm{M}} - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}\right[$, $b - a \geq \dfrac{\pi}{\mathrm{M}}$.

Divers

Solution 41

Soit M une telle application. Tout d'abord,

$$\mathrm{M}(0) = \mathrm{M}(0+0) = \mathrm{M}(0)^2$$

Donc M(0) est une matrice de projecteur.
De plus, pour $(t,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\mathrm{M}(t+h) - \mathrm{M}(t)}{h} = \frac{(\mathrm{M}(h) - \mathrm{M}(0))\mathrm{M}(t)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{M}'(0)\mathrm{M}(t)$$

Donc M est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}'(t) = \mathrm{M}'(0)\mathrm{M}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même,

$$\frac{\mathrm{M}(t+h) - \mathrm{M}(t)}{h} = \frac{\mathrm{M}(t)(\mathrm{M}(h) - \mathrm{M}(0))}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{M}(t)\mathrm{M}'(0)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}'(t) = \mathrm{M}(t)\mathrm{M}'(0)$.
Posons $\mathrm{A} = \mathrm{M}'(0)$ et considérons alors l'application $\mathrm{N} : t \mapsto \mathrm{M}(t)\exp(-t\mathrm{A})$. Comme le produit matriciel est bilinéaire, N est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{N}'(t) = \mathrm{M}'(t)\exp(-t\mathrm{A}) - \mathrm{M}(t)\mathrm{A}\exp(-t\mathrm{A}) = 0$$

On en déduit que N est constante égale à $\mathrm{N}(0) = \mathrm{M}(0)$. Par conséquent, $\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(0)\exp(t\mathrm{A})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Ce qui précède montre également que $\mathrm{M}(t)$ et A commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notamment M(0) et A commutent.
Réciproquement, soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A. Par conséquent, M_0 et $\exp(t\mathrm{A})$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posons $\mathrm{M} : t \mapsto \mathrm{M}_0\exp(t\mathrm{A})$.

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{M}(s)\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}_0\exp(s\mathrm{A})\mathrm{M}_0\exp(t\mathrm{A}) = \mathrm{M}_0^2\exp(s\mathrm{A})\exp(t\mathrm{A}) = \mathrm{M}_0\exp((s+t)\mathrm{A}) = \mathrm{M}(s+t)$$

Finalement, les applications recherchées sont les applications $t :\ \mathrm{M}_0\exp(t\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A.

Solution 42

Supposons que $A^\top$ possède une valeur propre λ strictement positive. Notons u un vecteur propre associé. Posons $\varphi(t) = u^\top x(t)$. Comme $\ell: y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^\top y$ est une forme linéaire, φ est également de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = u^\top x'(t) = u^\top Ax(t) = (A^\top u)^\top x(t) = \lambda u^\top x(t) = \lambda\varphi(t)$$

Ainsi $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais comme $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. On ne peut avoir $\varphi(0) \neq 0$ sinon $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \pm\infty$ puisque $\lambda > 0$. Ainsi $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou encore $\ell(x(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Si $A^\top$ ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que $A^\top$ possède une valeur propre complexe λ non réelle de partie réelle strictement positive car $\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A) > 0$. On note à nouveau u un vecteur propre associé.

> **Attention !** u est un vecteur à coefficients *complexes* donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment, $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. A nouveau, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ car $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Si $\varphi(0) \neq 0$, $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne peut plus poser $\lambda: y \mapsto u^\top y$ car λ serait alors à valeurs dans $\mathbb{C}$ et ne serait pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Néanmoins, il existe $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $u = v + iw$. Comme $u^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que x est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $v^\top x(t) = w^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc poser au choix $\lambda: y \mapsto v^\top y$ ou $\lambda: y \mapsto w^\top y$.

Solution 43

Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On choisit la norme euclidienne associé au produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. Donnons-nous X vérifiant $X' = AX$. Posons $f(t) = \|X(t)\|^2 = X(t)^\top X(t)$. Alors f est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = X'(t)^\top X(t) + X(t)^\top X'(t) = (AX(t))^\top X(t) + X(t)^\top AX(t) = X(t)A^\top X(t) + X(t)^\top AX(t) = 0$$

car $A^\top = -A$. Ainsi f est constante et notamment X est bornée.

Solution 44

1. Soit $f \in S_\alpha$. La fonction $g: x \mapsto f(\alpha - x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $f' = -g$, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Soit $f \in S_\alpha$. En dérivant l'identité $f'(x) = -f(\alpha - x)$ – ce qui est licite car f est de classe $\mathcal{C}^2$ – on obtient $f''(x) = f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Toute fonction de S_α est donc du type $x \mapsto \lambda\cos(x + \varphi)$ où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \lambda\cos(x + \varphi)$. Alors $f \in S_\alpha$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\alpha - x)$ i.e. $-\lambda\sin(x + \varphi) = -\lambda\cos(\alpha - x + \varphi)$.
   Si $\lambda = 0$, cette condition est évidemment vérifiée et f est la fonction nulle.
   Supposons $\lambda \neq 0$. Alors $f \in S_\alpha$ si et seulement si $\sin(x + \varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or

   $$\sin(x + \varphi) - \cos(\alpha - x + \varphi) = \sin(x + \varphi) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \alpha - \varphi\right) = 2\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

   Comme $\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ prend des valeurs non nulles lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $f \in S_\alpha$ si et seulement si $\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ i.e. $\varphi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$.
   Les éléments de S_α sont donc les fonctions du type $x \mapsto \lambda\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (ceci inclut le cas de la fonction nulle). Or $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k\cos\theta$, on peut donc faire disparaître le $k\pi$ en faisant rentrer le $(-1)^k$ dans la constante multiplicative λ : les éléments de S_α sont plus simplement les fonctions du type $x \mapsto \lambda\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 45

Soit f une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors f' est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos + \mu \sin$.
Réciproquement, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f = \lambda \cos + \mu \sin$. f est bien dérivable. De plus, f vérifie la relation de l'énoncé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \lambda \cos(-x) + \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mu - \lambda) \sin(x) + (\mu - \lambda) \cos(x) = 0$$

La condition $\lambda = \mu$ est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant $x = 0$ dans la dernière relation.
On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions $\lambda(\cos + \sin)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 46

Soit f une fonction dérivable vérifiant la relation de l'énoncé. Alors f' est également dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda \cos + \mu \sin$.
Réciproquement, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f = \lambda \cos + \mu \sin$. f est bien dérivable. De plus, f vérifie la relation de l'énoncé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = -\lambda \cos(-x) - \mu \sin(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mu + \lambda) \cos(x) - (\mu + \lambda) \sin(x) = 0$$

La condition $\mu = -\lambda$ est clairement suffisante mais on voit qu'elle est également nécessaire en prenant $x = 0$ dans la dernière relation.
On peut conclure que les fonctions recherchées sont les fonctions $\lambda(\cos - \sin)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.