Fonctions vectorielles

Continuité

Solution 1

1. En considérant sa dérivée, on montre que l'application $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un minimum en 0. Puisque $\varphi(0) = 1$, φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et en particulier, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'exponentielle n'admet donc pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ puis $\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) = e$. De même, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = e - 1$.
On sait que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$ donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$ puis $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{\tan x}} = 1$. Puisque $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est continue en $\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

3. Tout d'abord, $e - 1 > 0$ car $e \geq 2$ et $1 - \frac{\pi}{2} < 0$ car $\pi \geq 3$.
Puisque tan ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \mapsto \frac{x}{\tan x}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Comme sin ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Ainsi f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme différence de deux fonctions continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Puisque $\lim_0 f > 0$ et $\lim_{\frac{\pi}{2}} f < 0$, f s'annule sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

4. Tout d'abord,
$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b) = e^a(1 + i\tan b)\cos b = e^a\left(1 + i\frac{b}{a}\right)\cos b = \frac{e^a\cos b}{a}(a + ib) = \frac{e^a\cos b}{a}z$$
Puisque $f(b) = 0$, $e^a = \frac{b}{\sin b}$. Ainsi
$$\frac{e^a\cos b}{a} = \frac{b}{a\tan b} = 1$$
D'où $e^z = z$.

Solution 2

f est bijective puisque c'est une involution. Puisqu'elle est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, elle y est strictement monotone. Si f était strictement décroissante, on aurait $f(x) \leq f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui contredirait la surjectivité de f. Ainsi f est strictement croissante.
Soit alors $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $f(x) \neq x$. On a donc $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Si $f(x) > x$, alors $f \circ f(x) > f(x)$ par stricte croissance de f et donc $x > f(x)$, ce qui est contradictoire. De même, si $f(x) < x$, $f \circ f(x) < f(x)$ par stricte croissance de f et donc $x < f(x)$, ce qui est à nouveau contradictoire. Ainsi $f(x) = x$.
On peut alors conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Solution 3

Comme D est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^2$, il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^2$ et un réel α tels que $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathrm{D} \iff \varphi(x) = \alpha$. L'application $\varphi \circ f$ est continue sur I et, quitte à échanger a et b, on peut supposer $\varphi \circ f(a) > \alpha$ et $\varphi \circ f(b) < \alpha$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $\varphi \circ f(c) = \alpha$ i.e. $f(c) \in \mathrm{D}$.

Solution 4

1. De l'inclusion $I \subset f(I)$, on déduit l'existence de c et d appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. f prend donc les valeurs a et b sur I.

2. Notons g l'application définie par $g(t) = f(t) - t$ pour $t \in [a, b]$. Nous avons $g(c) = f(c) - c = a - c \leqslant 0$ et $g(d) = f(d) - d = b - d \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [c, d]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0) = t_0$. f admet donc un point fix sur I.

Solution 5

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.
Puisque f est décroissante, f admet une limite finie ou une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$. Dans les deux cas, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$.
De même, f admet une limite finie ou une limite égale à $+\infty$ en $-\infty$. Dans les deux cas, $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$.
Comme g est continue, g s'annule sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De plus, g est strictement décroissante donc injective. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui prouve que f admet un unique point fixe.

Dérivabilité

Solution 6

Soit M une telle application. Tout d'abord,

$$M(0) = M(0+0) = M(0)^2$$

Donc M(0) est une matrice de projecteur.
De plus, pour $(t, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{(M(h) - M(0))M(t)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} M'(0)M(t)$$

Donc M est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = M'(0)M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même,

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{M(t)(M(h) - M(0))}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} M(t)M'(0)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = M(t)M'(0)$.
Posons $A = M'(0)$ et considérons alors l'application $N : t \mapsto M(t)\exp(-tA)$. Comme le produit matriciel est bilinéaire, N est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ N'(t) = M'(t)\exp(-tA) - M(t)A\exp(-tA) = 0$$

On en déduit que N est constante égale à $N(0) = M(0)$. Par conséquent, $M(t) = M(0)\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Ce qui précède montre également que $M(t)$ et A commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notamment M(0) et A commutent.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A. Par conséquent, M_0 et $\exp(tA)$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posons $M : t \mapsto M_0 \exp(tA)$.

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ M(s)M(t) = M_0\exp(sA)M_0\exp(tA) = M_0^2\exp(sA)\exp(tA) = M_0\exp((s+t)A) = M(s+t)$$

Finalement, les applications recherchées sont les applications $t : M_0\exp(tA)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projecteur commutant avec A.

Solution 7

Supposons que $A^\top$ possède une valeur propre λ strictement positive. Notons u un vecteur propre associé. Posons $\varphi(t) = u^\top x(t)$. Comme $\ell : y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto u^\top y$ est une forme linéaire, φ est également de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = u^\top x'(t) = u^\top Ax(t) = (A^\top u)^\top x(t) = \lambda u^\top x(t) = \lambda\varphi(t)$$

Ainsi $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais comme $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$. On ne peut avoir $\varphi(0) \neq 0$ sinon $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \pm\infty$ puisque $\lambda > 0$. Ainsi $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ou encore $\ell(x(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Si $A^\top$ ne possède aucune valeur propre strictement positive, on peut néanmoins affirmer que $A^\top$ possède une valeur propre complexe λ non réelle de partie réelle strictement positive car $\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A) > 0$. On note à nouveau u un vecteur propre associé.

ATTENTION! u est un vecteur à coefficients *complexes* donc on va devoir raisonner un peu différemment que dans le cas précédent.

Comme précédemment, $\varphi(t) = \varphi(0)e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. A nouveau, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ car $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Si $\varphi(0) \neq 0$, $|\varphi(t)| = |\varphi(0)|e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne peut plus poser $\lambda : y \mapsto u^\top y$ car λ serait alors à valeurs dans $\mathbb{C}$ et ne serait pas une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Néanmoins, il existe $(v, w) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $u = v + iw$. Comme $u^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que x est à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $v^\top x(t) = w^\top x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc poser au choix $\lambda : y \mapsto v^\top y$ ou $\lambda : y \mapsto w^\top y$.

Solution 8

1. En développant par rapport à la dernière ligne,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta(x) = (f(b)g(x) - g(b)f(x)) - (f(a)g(x) - g(a)f(x)) + (f(a)g(b) - g(a)f(b))$$
Comme f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, Δ l'est également. De plus,
$$\forall x \in]a, b[,\ \Delta'(x) = (f(b)g'(x) - g(b)f'(x)) - (f(a)g'(x) - g(a)f'(x)) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$
2. Par caractère alterné du déterminant, $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\Delta'(c) = 0$ i.e. $(g(b) - g(a))\, f'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c)$.

Solution 9

Remarquons déjà que $f(0) = f(2 \times 0) = 2f(0)$ et donc $f(0) = 0_E$.
On montre alors aisément par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f(x)}{2^n}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n - 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(0)$$
Ainsi $f(x) = xf'(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (déjà montré pour $x = 0$) : f est bien linéaire.

Solution 10

1. Comme A commute avec B, on montre sans peine que A commute avec B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis que A commute avec P(B) pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ i.e. A commute avec tout élément de $\mathbb{K}[\mathrm{B}]$. On propose alors deux méthodes pour conclure.
Première méthode. Posons $\mathrm{S}_p = \sum_{k=0} \frac{\mathrm{B}^k}{k!} \in \mathbb{K}[\mathrm{B}]$. Alors $\mathrm{AS}_p = \mathrm{S}_p\mathrm{A}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme les applications $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{AX}$ et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{XA}$ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, elles sont continues. Puisque $\lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_p = \exp(\mathrm{B})$, on obtient en passant à la limite $\mathrm{A}\exp(\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{B})\mathrm{A}$.
Deuxième méthode. $\mathbb{K}[\mathrm{B}]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie. Ainsi $\mathbb{K}[\mathrm{B}]$ est fermé. Notamment, $\exp(\mathrm{B}) = \lim_{p\to+\infty} \mathrm{S}_p \in \mathbb{K}[\mathrm{B}]$. On en déduit que A commute avec exp(B).
2. Les applications $t \mapsto \exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))$, $t \mapsto \exp(-t\mathrm{B})$ et $t \mapsto \exp(-t\mathrm{A})$ sont dérivables de dérivées respectives $t \mapsto (\mathrm{A}+\mathrm{B})\exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))$, $t \mapsto -\mathrm{B}\exp(-t\mathrm{B})$ et $t \mapsto -\mathrm{A}\exp(-t\mathrm{A})$. Comme l'application $(\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3 \mapsto \mathrm{MNP}$ est trilinéaire, φ est dérivable et
$$\forall t \in [0, 1],\ \varphi'(t) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{A})\exp(-t\mathrm{B}) - \exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\mathrm{B}\exp(-t\mathrm{B})\exp(-t\mathrm{A}) - \exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{B})\mathrm{A}\exp(-t\mathrm{A})$$
Il est clair que B commute avec $t(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ et que A commute avec $-t\mathrm{B}$ et $t(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ donc la question précédente montre que
$$\forall t \in [0, 1],\ \varphi'(t) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{A})\exp(-t\mathrm{B}) - \mathrm{A}\exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{A})\exp(-t\mathrm{B}) - \mathrm{B}\exp(t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(-t\mathrm{A})\exp(-t\mathrm{B}) = 0$$
3. φ est donc constante sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier,
$$\exp(\mathrm{A} + \mathrm{B})\exp(-\mathrm{B})\exp(-\mathrm{A}) = \varphi(1) = \varphi(0) = \mathrm{I}_n$$
En prenant $\mathrm{B} = 0$ qui commute bien avec A, on obtient $\exp(\mathrm{A})\exp(-\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$ et donc également $\exp(-\mathrm{A})\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$. De la même manière, $\exp(-\mathrm{B})\exp(\mathrm{B}) = \mathrm{I}_n$. En multipliant à droite par l'égalité $\exp(\mathrm{A} + \mathrm{B})\exp(-\mathrm{B})\exp(-\mathrm{A}) = \varphi(1) = \mathrm{I}_n$ par $\exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$, on obtient alors le résultat voulu.

Solution 11

Notons $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et posons $\varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(f(t), f(b)-f(a))$. Comme f est continue sur $[a,b]$ (resp. dérivable sur $]a,b[$) et $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \det(x, f(b)-f(a))$ est linéaire, φ est continue sur $[a,b]$ (resp. dérivable sur $]a,b[$). De plus,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \det_{\mathcal{B}}(f(b), f(b)-f(a)) - \det_{\mathcal{B}}(f(a), f(b)-f(a)) = \det_{\mathcal{B}}(f(b)-f(a), f(b)-f(a)) = 0$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\forall t \in]a,b[,\ \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f'(t), f(b)-f(a))$$

donc

$$\varphi'(c) = \det_{\mathcal{B}}(f'(c), f(b)-f(a)) = 0$$

donc $f'(c)$ est colinéaire à $f(b)-f(a)$.

Solution 12

1. Soit $u : t \in \mathrm{I} \mapsto f(t) \wedge f'(t)$. Comme le produit vectoriel est bilinéaire et que f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in \mathrm{I},\ u'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

car $f'(t)$ est colinéaire avec lui-même de même et $f''(t)$ est colinéaire avec $f(t)$. On en déduit que u est constante sur I. Comme $(f(t_0), f'(t_0))$ est libre, $u(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t)$ est orthogonal à $u(t) = u(t_0)$. Ainsi f est à valeurs dans le plan vectoriel admettant $u(t_0)$ comme vecteur normal.

2. Notons $\mathcal{B}$ une base orthonormale du plan précédent. Alors l'aire $\mathrm{A}(t)$ du triangle défini dans l'énoncé et $\mathrm{A}(t) = \dfrac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(f(t), f'(t))$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est bilinéaire, on montre comme précédement que A est de classe $\mathcal{C}_1$ sur I et que

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \mathrm{A}'(t) = \frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(f'(t), f'(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f(t), f''(t)) = 0$$

pour les mêmes raisons que précédemment. Ainsi A est constante sur I.

Solution 13

Notons $\mathrm{C}_1(t), \dots, \mathrm{C}_n(t)$ les colonnes de $\mathrm{A}(t)$. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}_1(t), \dots, \mathrm{C}_n(t))$$

Comme A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, les C_i le sont également et, par multilinéarité de $\det_{\mathbb{B}}$, φ l'est aussi. De plus,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi'(t) = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}'_1(t), \mathrm{C}_2(t), \dots, \mathrm{C}_n(t)) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}_1(t), \dots, \mathrm{C}_{n-1}(t), \mathrm{C}'_n(t))$$

En notant $\mathrm{B}_j(t)$ la matrice $\mathrm{A}(t)$ dans laquelle on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ colonne par $\mathrm{C}'_j(t)$, on a donc

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det(\mathrm{B}_j(t))$$

En développant $\det(\mathrm{B}_j(t))$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne,

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \det(\mathrm{B}_j(t)) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{A}'(t))_{i,j}\, \mathrm{com}(\mathrm{A}(t))_{i,j}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{A}'(t))_{i,j}\, \mathrm{com}(\mathrm{A}(t))_{i,j} = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(\mathrm{A}(t))^{\top} \mathrm{A}'(t))$$

Solution 14

1. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«Il existe un polynôme P_{n-1} tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$.»

HR(1) est vraie : il suffit de prendre $P_0 = 1$.
Supposons HR(n) pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} - \frac{2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Il suffit donc de prendre $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$.
Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si P_{n-1} et Q_{n-1} sont deux polynômes vérifiant la condition de l'énoncé, alors ils coïncident sur $\mathbb{R}$. Ils sont donc égaux. D'où l'unicité.

2. Commençons par la parité. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«P_n a la parité de n.»

HR(0) est vraie puisque $P_0 = 0$ est pair. Supposons HR($n-1$) pour un certain $n \geq 1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair donc P_{n-1} est impair d'après HR($n-1$). Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont pairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est pair.
- Si n est impair, $n-1$ est pair donc P_{n-1} est pair d'après HR($n-1$). Mais alors P'_{n-1} et XP_{n-1} sont impairs. Or $P_n = (1+X^2)P'_{n-1} - 2nXP_{n-1}$ donc P_n est impair.

Donc HR(n) est vraie. Par récurrence, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Occupons-nous maintenant du degré et du coefficient dominant. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«$\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$ si n est pair, $-(n+1)!$ si n est impair.»

HR(0) est vraie puisque $P_0 = 1$. Supposons HR($n-1$) pour un certain $n \geq 1$. On a donc $\deg P_{n-1} = n-1$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $-n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $-(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $-2nn!$. Puisque $-(n-1)n! + 2nn! = (n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $(n+1)!$.
- Si n est impair, $n-1$ est pair et le coefficient dominant de P_{n-1} est $n!$. On a $\deg P'_{n-1} = n-2$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de P'_{n-1} est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). Donc $\deg(1+X^2)P'_{n-1} = n$ (éventuellement $-\infty$ si $n=1$) et le coefficient dominant de $(1+X^2)P'_{n-1}$ est $(n-1)n!$ (pas de coefficient dominant si $n=1$). De même, $\deg 2nXP_{n-1} = n$ et le coefficient dominant de $2nXP_{n-1}$ est $2nn!$. Puisque $(n-1)n! - 2nn! = -(n+1)! \neq 0$, on en déduit que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $-(n+1)!$.

Ainsi HR(n) est vraie. Par conséquent, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\deg P_{n-1} = n-1 < 2n$ pour $n \geq 1$, $P_{n-1}(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} (1+x^2)^n$. On en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

4. Remarquons tout d'abord que les zéros de $f^{(n)}$ sont les zéros de P_{n-1}. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :

«$f^{(n}$ s'annule au moins $n-1$ fois.»

HR(1) est évidemment vraie. Supposons HR(n) pour un certain $n \geq 1$. Si $n=1$, $\lim_{x\to+\infty} f^{(2)}(x) = 0$, donc $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ d'après une généralisation classique du théorème de Rolle. Si $n > 1$, $f^{(n)}$ possède au moins $n-1$ zéros que nous noterons $x_1 < \cdots < x_{n-1}$. En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En appliquant la même généralisation du théorème de Rolle à $f^{(n)}$ sur les intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_{n-1}, +\infty[$, on montre que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$ et $]x_{n-1}, +\infty[$. On fait le compte : on a monté que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins n fois. Ainsi HR(n) est vraie. Par récurrence HR(n) est vraie pour tout $n \geq 1$.
Comme les zéros de $f^{(n+1)}$ sont les zéros de P_n, on a prouvé que P_n admet au moins n racines réelles distinctes. Comme $\deg P_n = n$, P_n admet au plus n racines comptées avec multiplicité. On en déduit que toutes les racines de P_n sont réelles et simples.

Solution 15

1. On note $\mathrm{HR}(n)$ la propriété à démontrer.
HR(0) est vraie en posant $\mathrm{P}_0 = 1$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{P}_n(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2n}}$$
En dérivant, on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(t) = \frac{\left(t^2\mathrm{P}_n'(t) - 2nt\mathrm{P}_n(t) + \mathrm{P}_n(t)\right)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$
En posant $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{X}^2\mathrm{P}_n' - 2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n$, on e donc
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(t) = \frac{\mathrm{P}_{n+1}(t)e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(n+1)}}$$
Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Notons g la restriction de f à $\mathbb{R}^*$. g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0^+} g^{(n)}(t) = 0$ et on a évidemment $\lim\limits_{t\to 0^-} g^{(n)}(t) = 0$ puisque $g^{(n)}$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} g^{(n)}(t) = 0$. Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Mais puisque f est continue en 0 (étudier les limites en 0^+ et 0^-), $f = g$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 16

Notons a et b les abscisses respectives de A et B. Pour simplifier, nous supposerons $a < b$. Le fait que B soit sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A se traduit par :
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) \text{ ou encore } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$$
De même, on cherche donc un point M d'abscisse c vérifiant :
$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c)$$
Définissons une fonction g sur I par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x \in \mathrm{I} \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$. g est continue sur $]a,b]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme f est dérivable en a, g est continue en a. g est donc continue sur $[a,b]$. De plus, g est dérivable sur $]a,b[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, $g(b) = g(a) = f'(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour $x \in]a,b[$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$. On a donc
$$f'(c)(c-a) - f(c) + f(a) = 0$$
ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.

Intégration

Solution 17

1. Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, $\|\mathrm{A}^k\| \leq \|\mathrm{A}\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $\|\mathrm{A}\| < 1$ donc la série géométrique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|\mathrm{A}\|^k$ converge. Par majoration, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|\mathrm{A}^k\|$ converge également i.e. la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}^k$ converge absolument. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, la

série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}^k$ converge. L'endomorphisme $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{AX}$ est continu puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Ceci nous permet d'affirmer que

$$\mathrm{A}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^{k+1}$$

puis que

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{I}_n$$

donc $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k$.

2. Remarquons déjà que $z \neq 0$ puisque $|z| > \|\mathrm{A}\| \geq 0$. Remarquons alors que $z\mathrm{I}_n - \mathrm{A} = z\left(\mathrm{I}_n - \frac{1}{z}\mathrm{A}\right)$ et que $\left\|\frac{1}{z}\mathrm{A}\right\| = \frac{\|\mathrm{A}\|}{|z|} < 1$. D'après la question précédente, $\mathrm{I}_n - \frac{1}{z}\mathrm{A}$ est inversible et

$$\left(\mathrm{I}_n - \frac{1}{z}\mathrm{A}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{z^k}$$

Comme $z\mathrm{I}_n - \mathrm{A} = z\left(\mathrm{I}_n - \frac{1}{z}\mathrm{A}\right)$, $z\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est également inversible et

$$(z\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{z^{k+1}}$$

3. D'après la question précédente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1}(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{r^{p+1}e^{i(p+1)\theta}}\,\mathrm{d}\theta = r^k \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Posons $u_p : \theta \mapsto \frac{\mathrm{A}^p}{r^p}e^{i(k-p)\theta}$. Alors $\|u_p\|_\infty = \frac{\|\mathrm{A}^p\|}{r^p} \leq \left(\frac{\|\mathrm{A}\|}{r}\right)^p$ donc la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. Par interversion série/intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{A}^p}{r^p} e^{i(k-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{r^p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^p}{r^p} \cdot 2\pi\delta_{k,p} = 2\pi\frac{\mathrm{A}^k}{r^k}$$

On en déduit le résultat voulu.

4. Posons $\chi_\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k$. Alors

$$\begin{aligned}
\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{A}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{k+1}(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k re^{ik\theta}(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}\chi_\mathrm{A}(re^{i\theta})(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}\det(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(re^{i\theta}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}\,\mathrm{com}(re^{i\theta} - \mathrm{A})^\top\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

d'après la formule de la comatrice.

5. Remarquons que chaque coefficient de $\mathrm{com}(re^{i\theta} - \mathrm{A})^\top$ est un polynôme en $re^{i\theta}$. Ainsi les coefficients de $re^{i\theta}\,\mathrm{com}(re^{i\theta} - \mathrm{A})^\top$ sont des polynômes en $re^{i\theta}$ de coefficients constants nuls. Leur intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est donc nulle. On en déduit que $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$.

Solution 18

---

1. Pour simplifier, posons $\mathrm{M} = \max\limits_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$. Par inégalité triangulaire,

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

De plus,

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^t f'(u)\,\mathrm{d}u$$

A nouveau par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in [a,b],\ \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u \leq \mathrm{M}(t-a)$$

En reprenant ce qui précède

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \mathrm{M}(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{2}$$

2. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \left\|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right\| + \left\|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],\ f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^t f'(u)\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],\ \|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u \leq \mathrm{M}(t-a)$$

puis

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \mathrm{M}(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{8}$$

D'autre part

$$\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],\ f(t) = f(b) - \int_t^b f'(u)\,\mathrm{d}u = -\int_t^b f'(u)\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],\ \|f(t)\| \leq \int_t^b \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u \leq \mathrm{M}(b-t)$$

puis

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b \mathrm{M}(b-t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{8}$$

On en déduit finalement que

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq 2\cdot\frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{8} = \frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{4}$$

Sommes de Riemann

Solution 19

On peut écrire $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-k)} = n^2 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$. On reconnaît une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, \mathrm{d}x$$

On met le trinôme sous la racine sous forme canonique :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-(2x-1)^2}\, \mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable $u = 2x - 1$:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u$$

Or $\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, \mathrm{d}u$ est l'aire du demi-disque unité et vaut donc $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\mathrm{I} = \frac{\pi}{8}$ puis que $u_n \underset{n o+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2$.

Solution 20

Les racines de $\mathrm{X}^{2n} - 1$ sont les complexes $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![-n+1, n]\!]$. Mais pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $z_{-k} = \overline{z_k}$ donc

$$\mathrm{X}^{2n} - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1) \prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X}-z_k)(\mathrm{X}-\overline{z_k}) = (\mathrm{X}^2-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

Notons I l'intégrale à calculer. On a

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\, d\theta$$

Par parité de cos, on peut affirmer que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\, d\theta$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\mathrm{S}_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

Comme $\theta \mapsto \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)$ est continue sur $[0, \pi]$, la suite (S_n) converge vers I d'après le théorème sur les sommes de Riemann. Mais d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \\
&= \frac{\pi}{n} \ln\left((r-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \\
&= \frac{\pi}{n} \ln\left((r-1)^2 \frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right) \\
&= \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{r-1}{r+1} r^{2n} - 1\right) \\
&= \frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) + \frac{\pi}{n} \ln\frac{r-1}{r+1}
\end{aligned}$$

Tout d'abord, $\frac{\pi}{n} \ln\frac{r-1}{r+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puis

$$\frac{\pi}{n} \ln(r^{2n}-1) = 2\pi \ln r + \frac{\pi}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{r^{2n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi \ln r$$

On en déduit que $\mathrm{I} = 2\pi \ln r$.

Solution 21

1. On reconnaît une somme de Riemann. Puisque $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)-(1+x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln(4)-1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \ln(4) + \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\\
&= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)\\
&= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\\
&= \ln(4) + \ln(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)\\
&= \ln(4) - \mathrm{S}_n
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\ln(u_n))$ converge vers 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers e.

Solution 22

On pense évidemment à une somme de Riemann. On aurait eu directement le résultat si le terme général de la somme avait été $f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $f\left(\frac{k+1}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$. L'idée est donc de se ramener à une telle somme. Le fait que g est supposée être de classe $\mathcal{C}^1$ et non $\mathcal{C}^0$ donne un indice.

Posons pour commencer

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$|\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur le segment $[0,1]$ elle y est bornée. Notons alors M un majorant de $|f|$.

Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, sa dérivée g' y est continue. g' est donc bornée sur le segment $[0,1]$. En notant K un majorant de $|g'|$, l'inégalité des accroissements finis montre que g est K-lipschitzienne sur $[0,1]$.

En reprenant l'inégalité précédente, on obtient donc

$$|\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{MK}}{n} = \frac{\mathrm{MK}}{n}$$

ou encore

$$\mathrm{T}_n - \frac{\mathrm{MK}}{n} \leq \mathrm{S}_n \leq \mathrm{T}_n + \frac{\mathrm{MK}}{n}$$

Or on sait que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ d'après le théorème sur les sommes de Riemann appliqué à la fonction continue fg et que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{MK}}{n} = 0$ donc le théorème des gendarmes montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution 23

Remarquons tout d'abord que le membre de gauche est bien défini i.e. que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ appartient bien à $f([a,b])$. En effet, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc $f([a,b]) = [m, \mathrm{M}]$ avec $m = \min_{[a,b]} f$ et $\mathrm{M} = \max_{[a,b]} f$. Puisque $m \leq f \leq \mathrm{M}$ sur $[a,b]$, $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \mathrm{M}$ en intégrant.
Posons alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \mathrm{T}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Le théorème sur les sommes de Riemann permet d'affirmer que (S_n) et (T_n) convergent respectivement vers $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b \varphi \circ f(t)\,dt$.
De plus, l'inégalité de convexité généralisée montre que

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

ce qui s'écrit encore

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\mathrm{S}_n\right) \leq \frac{1}{b-a}\mathrm{T}_n$$

La continuité de φ permet alors d'obtenir l'inégalité voulue par passage à la limite.

Formules de Taylor

Solution 24

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ au premier ordre :

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où M est un majorant de $|f''$ sur $[0, 1]$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\mathrm{S}_n - f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{\mathrm{M}}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\left|\mathrm{S}_n - f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}\right| \leq \frac{\mathrm{M}}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution 25

1. Comme f est nulle sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > \frac{1}{2}$. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, les $f^{(n)}$ sont continues et donc $f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $\frac{1}{2}$ et 0 :

$$\left|f(0) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k k!}f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n n!}\sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|f^{(n)}\right|$$

On a vu précédemment que $f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Par ailleurs, $\sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}\left|f^{(n)}\right| \leq \sup_{\mathbb{R}_+}\left|f^{(n)}\right|$ (on a même égalité). Enfin, $f(0) = 1$ par hypothèse donc on obtient le résultat voulu.

2. Soit $n \geq 1$. Supposons $\sup_{\mathbb{R}_+}\left|f^{(n)}\right| = 2^n n!$ et posons

$$g(x) = f(x) - (1-2x)^n, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (-1)^n 2^n n!$. Montrons par récurrence finie décroissante sur $k \in [\![1;n]\!]$ que $g^{(k)}$ est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. D'après notre hypothèse, c'est clair pour $k = n$. Supposons $g^{(k)}$ de signe constant pour un certain k tel que $1 < k \leq n$. Alors $g^{(k-1)}$ est monotone. Or

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x) - \frac{n!}{(n-k+1)!}(1-2x)^{n-k+1}$$

donc $g^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (puisque $n-k+1 > 0$). Ainsi $g^{(k-1)}$ est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Donc, par récurrence, g' est de signe constant sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et g est monotone sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Comme $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, g est nulle sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Or $g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1)^n 2^n n! \neq 0$. Il y a donc contradiction.

Solution 26

Soit $x \in \left]-\frac{1}{\lambda};\frac{1}{\lambda}\right[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x au rang n donne :

$$|f(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}\sup_{[0;x]}\left|f^{(n)}\right| \leq |\lambda x|^n < 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$. On a vu que c'était vrai pour $k = 1$. Supposons-le vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions :

$$g_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x - \frac{k}{\lambda}\right) \end{array} \quad \text{et } g_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \end{array}$$

Comme f est nulle sur $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$ par hypothèse de récurence et que les $f^{(n)}$ sont continues, on a donc :

$$f^{(n)}\left(-\frac{k}{\lambda}\right) = f^{(n)}\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire

$$g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus $\sup_{\mathbb{R}}\left|g_1^{(n)}\right| = \sup_{\mathbb{R}}\left|g_2^{(n)}\right| = \sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}\right|$. Donc g_1 et g_2 vérifient les mêmes hypothèses que f : elles sont donc nulles sur $\left]-\frac{1}{\lambda};\frac{1}{\lambda}\right[$. Par conséquent, f est nulle sur $\left]-\frac{k+1}{\lambda};\frac{k+1}{\lambda}\right[$.

Par récurrence, f est donc nulle sur tout intervalle $\left]-\frac{k}{\lambda};\frac{k}{\lambda}\right[$ où $k \in \mathbb{N}^*$: elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 27

On a clairement $\varphi(b) = 0$. On choisit donc A tel que $\varphi(a) = 0$. Il suffit ainsi de choisir A tel que :

$$\mathrm{A}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - f(b) \tag{$*$}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, pour $x \in]a,b[$:

$$\varphi'(x) = -\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(x)k!(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!}$$

Par télescopage, on obtient :

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!}$$

Comme $\varphi'(c) = 0$, on obtient :

$$\mathrm{A} + f^{(n+1)}(c) = 0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation $(*)$ pour obtenir l'égalité voulue.

Solution 28

---

1. Soit l'hypothèse de récurrence : «$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$».

   Initialisation : Pour tout $x \in]-1,+\infty$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{(-1)^0 0!}{(1+x)^0}$. Donc HR(1) est vraie.

   Hérédité : On suppose HR(n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. En dérivant, on obtient

   $$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

   Conclusion : HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Pour $t \in [0,1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$ donc

   $$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k \right| \leq n!\frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   On en déduit que

   $$|\ln 2 - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Il est immédiat que (u_n) converge vers $\ln(2)$.

   > **Remarque.** On peut alors noter $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Solution 29

---

1. Si $\mathrm{M}_0 = 0$, alors f est constamment nulle donc $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = 0$ et l'inégalité est vérifiée.
   Si $\mathrm{M}_2 = 0$, alors f est affine. Mais comme f est bornée, f est constante. On a donc $\mathrm{M}_1 = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée.

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$, ce qui donne le résultat voulu.

3. Par inégalité triangulaire,

   $$\begin{aligned} |f'(x)h| &\leq |f'(x)h + f(x) - f(x+h)| + |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \\ &\leq \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2} + 2\mathrm{M}_0 \end{aligned}$$

   Puisque $h > 0$,

   $$|f'(x)| \leq \frac{\mathrm{M}_2 h}{2} + \frac{2\mathrm{M}_0}{h}$$

4. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = b - \dfrac{a}{t^2}$. On a donc $g'(t) \leq 0$ pour $0 < t \leq \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et $g'(t) \geq 0$ pour $t \geq \sqrt{\dfrac{a}{b}}$. On en déduit que g admet un minimum en $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et que celui-ci vaut $g\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = 2\sqrt{ab}$.

5. L'inégalité

$$|f'(x)| \leq \frac{\mathrm{M}_2 h}{2} + \frac{2\mathrm{M}_0}{h}$$

étant valable pour tout $h > 0$, elle est notamment valable pour h minimisant le membre de droite. Il suffit alors d'appliquer la question précédente avec $a = 2\mathrm{M}_0$ et $b = \frac{\mathrm{M}_2}{2}$. On en déduit que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{2\mathrm{M}_0 \times \frac{\mathrm{M}_2}{2}} = 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par passage à la borne supérieure :

$$\mathrm{M}_1 \leq 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$$

Solution 30

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral assure que $\mathrm{R}_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$. En effectuant le changement de variable $t = xu$, on obtient

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Comme $f^{(n+1)}$ est positive,

$$|\mathrm{R}_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

De même,

$$\mathrm{R}_n(r) = \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u$$

Mais $f^{(n+1)}$ est croissante sur I puisque $f^{(n+2)}$ est positive sur I. Ainsi puisque $x < r$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(ru)$ pour tout $u \in [0,1]$ puis

$$\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit l'inégalité demandée.

2. Soit $x \in \mathrm{I}$. Il existe $r \in]0, \mathrm{R}[$ tel que $|x| < r$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \mathrm{R}_n(r)$$

D'une part, l'expression intégrale de $\mathrm{R}_n(r)$ montre que $\mathrm{R}_n(r) \geq 0$. D'autre part, $f(r) = \mathrm{S}_n(r) + \mathrm{R}_n(r)$ et $\mathrm{S}_n(r) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs. Ainsi $\mathrm{R}_n(r) \leq f(r)$. La suite $(\mathrm{R}_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|x| < r$, $\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} \mathrm{R}_n(r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\mathrm{R}_n(x) \underset{n\to+\infty 0}{\longrightarrow}$ i.e. $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Solution 31

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$ au premier ordre :

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

où M est un majorant de $|f''$ sur $[0,1]$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \mathrm{S}_n - f'(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{\mathrm{M}}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^4}$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ainsi

$$\left|S_n - f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}\right| \leq \frac{M}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution 32

---

1. Il est clair que $\lim_{0} g = 0$. g est donc prolongeable par continuité en 0.

2. g est dérivable sur $]0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1]$,
$$g'(x) = 1 + \ln(x)$$
Ainsi g' est strictement négative sur $]0, e^{-1}[$, s'annule en e^{-1} et est strictement positive sur $]e^{-1}, 1]$.
g est donc strictement décroissante sur $[0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, 1]$.

3. Tout d'abord, $-g(x) - x = -x(\ln x + 1) \geq 0$ pour tout $x \in]0, e^{-1}]$. En particulier, $-g(t_0) \geq t_0$. On a évidemment $t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$ pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de $-g$ sur $[0, e^{-1}]$, $-g(t_0) \leq -g(t_n) \leq -g(e^{-1})$ donc a fortiori $t_0 \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$. On a donc bien montré par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_0 \leq t_n \leq e^{-1}$$

4. Fixons $x \in [t_0, e^{-1}]$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[x, e^{-1}]$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
$$\left|g(x) - g(e^{-1}) - g'(e^{-1})(x - e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2 \max_{[x,e^{-1}]} |g''|}{2}$$
Or $g'(e^{-1}) = 1 + \ln(e^{-1}) = 0$ et
$$\max_{[x,e^{-1}]} |g''| = \max_{t\in[x,e^{-1}]} \frac{1}{t} = \frac{1}{x \leq \frac{1}{t_0}}$$
On en déduit que
$$\left|g(x) - g(e^{-1})\right| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5. D'après la question précédente,
$$|t_1 - e^{-1}| = |g(t_0) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_0 - e^{-1}|^2}{2t_0} = \frac{(e^{-1} - t_0)^2}{2t_0}$$
Donc l'inégalité à établir est vraie lorsque $n = 1$.
Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leq \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \leq \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$
Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Remarquons que
$$\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} = \frac{e^{-1}}{2t_0} - \frac{1}{2}$$
Puisque $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$,
$$\frac{1}{2} < \frac{e^{-1}}{2t_0} < \frac{3}{2}$$

Ainsi

$$0 < \frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} < 1$$

Posons $q = \dfrac{e^{-1} - t_0}{2t_0}$. La suite géométrique (q^n) converge donc vers 0. Sa suite extraite (q^{2^n}) converge également vers 0. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 q^n$$

la suite (t_n) converge vers e^{-1}.