# Révisions d'intégration

### Exercice 1 ★

Calculer

1. $\displaystyle\int x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int e^x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ en posant $u=\ln x$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u=\sqrt{1+x}$.
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$

### Exercice 2 ★★

On pose $\mathrm{S}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{S}=\mathrm{C}$ par changement de variable.
3. Que vaut $\mathrm{S}+\mathrm{C}$ ? En déduire S et C.
4. En déduire $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

### Exercice 3 ★★ Règles de Bioche

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant $u=\cos t$ ;
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ pour $x\in]0,\pi[$ en posant $u=\cos t$ ;
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u=\sin t$ ;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ en posant $u=\tan\frac{t}{2}$.

### Exercice 4 ★★ Intégrales de Wallis

On pose pour tout $n\geq 0$,

$$\mathrm{I}_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx.$$

1. Calculer $\mathrm{I}_0$ et $\mathrm{I}_1$.
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_{n+2}$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{2n}$ et $\mathrm{I}_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ à l'aide de factorielles.
4. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n\leq\mathrm{I}_{n+1}\leq\mathrm{I}_n$.
5. Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{I}_n$.
6. Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\ \ (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n=\dfrac{\pi}{2}$.
7. En déduire que

$$\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

### Exercice 5

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Montrer que $(u_n)$ converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

### Exercice 6 ★★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $(\mathrm{I}_n)$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_{n+1}$.
3. On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer $\mathrm{S}_n$ en fonction de $\mathrm{I}_n$.
4. En déduire la convergence et la limite de $(\mathrm{S}_n)$.

### Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes.

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J} = \int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{K} = \int_0^\pi e^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{L} = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,\mathrm{d}x$$

### Exercice 8

Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

## Convergences

### Exercice 9 ★★

On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+(x+n\pi)^4\sin^2 x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Encadrer les termes de la suite $(u_n)$ à l'aide des termes de la suite $(v_n)$ où
$$v_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$$
3. Calculer explicitement $v_n$ et en déduire un équivalent de $u_n$.
4. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$.

### Exercice 10 ★★★★ Mines MP 2016

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(\mathrm{P}(x))|\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer le signe de I lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2$.

**Exercice 11** ★★

Les intégrales suivantes convergent-elles ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x} \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

**Exercice 12** ★★ **Intégrales de Bertrand**

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge-t-elle ?
2. Même question pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$.

**Exercice 13** ★★★ **Centrale-Supélec MP 2021**

On considère $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer l'existence de I.
2. Montrer $\mathrm{I} < 0$.

**Exercice 14** ★★★

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ converge.
2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \, \mathrm{d}x$.

**Exercice 15** ★★★

Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

**Exercice 16** ★★★ **X-ESPCI PC 2013**

Soit $f : [1,+\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $(f')^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer qu'il en est de même pour $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$.

**Exercice 17** ★★ **Non convergence absolue de l'intégrale de Dirichlet**

Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 18** ★★ **E3A PSI 2020**

Soient $a$ un réel strictement positif et $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $\lambda$, on pose $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. Justifier qu'il existe au plus un réel $\lambda$ tel que $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

2. Pour tout réel $x$, on pose $\mathrm{H}_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t))\, \mathrm{d}t$.

   Démontrer que, si $\mathrm{H}_\lambda$ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\mathrm{I}(\lambda)$ existe et $\mathrm{I}(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_\lambda(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

3. On suppose désormais que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.

   **a.** Montrer que pour tout réel $x$ :

   $$\mathrm{H}_\lambda(x+\mathrm{T}) - \mathrm{H}_\lambda(x) = \lambda\mathrm{T} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, \mathrm{d}t$$

   **b.** Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda_0$ du réel $\lambda$ pour la quelle la suite $(\mathrm{H}_\lambda(a+n\mathrm{T}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   **c.** Prouver que, dans ce cas, la fonction $\mathrm{H}_\lambda$ est périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

   **d.** Déterminer alors toutes les valeurs du réel $\lambda$ pour lesquelles $\mathrm{I}(\lambda)$ converge.

   **e.** Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose

   $$\mathrm{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t}\, \mathrm{d}t$$

   **a.** Justifier que $\mathrm{A}_n$ et $\mathrm{B}_n$ sont bien définies.

   **b.** Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

   **c.** Démontrer que la suite $(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

   **d.** A l'aide d'un changement de variable et de la question **3**, déterminer un équivalent de $\mathrm{B}_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de $\mathrm{A}_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 19** **Centrale-Supélec MP 2022**

1. Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

2. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\, \mathrm{d}t$.

3. Donner la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

## Théorie

**Exercice 20** ★★★★

1. Soit $f$ une application continue par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite $\ell$ en $+\infty$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\ell = 0$.

2. Soit $f$ une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

**Exercice 21** ★★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

**Exercice 22** ★★★★

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f$ et $f''$ soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'$ est également de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que

   $$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

**Exercice 23** ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Prouver que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f(t)\,dt$ converge et que dans ces conditions :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\,dt$$
2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ?

**Exercice 24** ★★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f$ est de limite nulle en $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

**Exercice 25** **Saint-Cyr MP 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ convergent. On pose $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$.
2. On suppose dorénavant que $f$ est décroissante. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int_0^m f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt \geq m$.

# Calculs

**Exercice 26** ★★★

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,dt$ où $a, b > 0$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{2\pi}$.

**Exercice 27** ★★★

$n$ désigne un entier naturel et $\alpha$ un réel strictement supérieur à $-1$. On pose
$$\mathrm{I}_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$$

1. Justifier que cette intégrale est bien définie.
2. Calculer $\mathrm{I}_0(0)$. Posant $t = \sqrt{\frac{1+\alpha x}{1-x}}$, calculer $\mathrm{I}_0(\alpha)$. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto \mathrm{I}_0(\alpha)$ est continue en 0.
3. En dérivant $x^n\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{n-1}(\alpha)$, $\mathrm{I}_n(\alpha)$ et $\mathrm{I}_{n+1}(\alpha)$. En déduire les valeurs de $\mathrm{I}_n(0)$ et $\mathrm{I}_n(1)$.

**Exercice 28** ★★

Convergence et calcul de
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

**Exercice 29** ★★★ **X MP 2010**

Déterminer
$$\sup_{x>0}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$$

**Exercice 30** ★★★

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$ converge-t-elle ?
2. On pose $\mathrm{J}(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$. Montrer que $\mathrm{I}(a) = \mathrm{J}(a) + \mathrm{J}(-a)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.

**Exercice 31** ★★ **CCP MP**

1. Déterminer le domaine de définition $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $\mathrm{F}(1)$.
3. Calculer $\mathrm{F}(x)$ pour tout $x$ dans le domaine de définition de $f$.

**Exercice 32** ★★★ **Intégrale de Dirichlet**

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
Justifier que $u_n$ et $v_n$ sont bien définies.
3. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)$ est constante et préciser sa valeur.
4. Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Par une intégration par parties, montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b h(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.
5. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
6. Calculer la limite de la suite $(u_n - v_n)$ puis celle de $(v_n)$.
7. En déduire la valeur de I.

**Exercice 33** ★★★ **TPE-EIVP PSI 2017**

Soit $a > 1$, Soit $f$ une fonction continue sur $[1, +\infty[$ admettant une limite finie $\ell$ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $x$ dans $[1, +\infty[$ :
$$\int_1^x \frac{f(at) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer en fonction de $\int_1^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et de $\ell$.

**Exercice 34 ★★**

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale définissant I converge.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $2\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire la valeur de I.

**Exercice 35 ★★★**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Convergence et calcul de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 36 ★★**

Existence et calcul de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 1}$$

**Exercice 37 ★★** **Trigonométrie**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 38 ★**

Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs le cas échéant.

1. $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4 + t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\mathrm{J} = \int_0^{2} \frac{1}{4 - t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\mathrm{L} = \int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\mathrm{M} = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$
6. $\mathrm{N} = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - 9t^2}}\,\mathrm{d}t$
7. $\mathrm{O} = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 3t + 2}$
8. $\mathrm{P} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$

**Exercice 39** ★★ **E3A MP Maths1 2015**

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge. On admet alors que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Dans la suite de l'énoncé, $\alpha$ désigne un réel strictement positif et $x$ un réel.

   **a.** Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   **b.** Montrer que l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On pose
$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}\,dt$$

   **a.** Montrer que I est réelle.

   **b.** Soient $\mathrm{A} > 0$ et $\mathrm{B} > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx$. Montrer que
$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\,dx = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

   **c.** En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}$ pour $\mathrm{B} > 0$ puis pour B quelconque.

   **d.** En déduire la valeur de I.

# Comportements asymptotiques

**Exercice 40** ★★★ **Centrale PSI**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,dt$$

On suppose que $\varphi$ admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que $f$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

**Exercice 41** ★★★★ **Mines-Ponts MP 2016**

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $f$ de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f' + af = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

2. Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

3. Généraliser.

**Exercice 42** ★★★ **Centrale MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer la limite de $g$ en 0.

2. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.

3. Montrer que $g$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 43** ★★★

Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 44** ★★★

1. Montrer que $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 45** ★★★

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)+f'(x)=0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**Exercice 46** ★★★ **Banque Mines-Ponts PSI 2021**

Soit $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que $f$ est définie sur $I = ]0,+\infty[$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur I et déterminer $f'$.
3. Déterminer un équivalent de $f$ en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est définie et la calculer.

**Exercice 47** ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2017**

On pose pour tout $x$ non nul,

$$F(x)=\int_x^{7x}\frac{1-e^{-t}}{t^2}\,dt$$

Déterminer $\lim_{x\to0^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

**Exercice 48** ★

Déterminer des équivalents de

1. $\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,dt$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;
2. $\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,dt$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;
3. $\int_x^1 \frac{e^t}{t^3}\,dt$ lorsque $x$ tend vers $0^+$ ;
4. $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ lorsque $x$ tend vers $0^+$.

**Exercice 49**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x}\frac{\operatorname{ch} t}{t}\,dt$$

1. Justifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to0}{=} \ln 2 + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$.
5. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x}$.

**Exercice 50** ★★★ **CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in ]0,1]$ tel que
$$\int_{u_n}^{1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$$
On pourra considérer la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)$ et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que $(v_n)$ converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ ?

## Suites d'intégrales

**Exercice 51** ★★★ **CCP MP 2018**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et $\pi$-périodique vérifiant
$$\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \int_0^{\pi} f(t)e^{-t/n}\,\mathrm{d}t \qquad v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $u_n$ et $v_n$ sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier qu'il existe une suite $(a_n)$, que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que $(u_n)$ converge vers 0. Montrer que $(v_n)$ converge et préciser sa limite.

**Exercice 52** ★★

Soit $f_n : t \mapsto \cos(2nt)\ln(\sin t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que $f_n$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On pose alors $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = 2n\mathrm{I}_n$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathrm{J}_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$$
3. Calculer $\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n$ et en déduire la valeur de $\mathrm{J}_n$ puis celle de $\mathrm{I}_n$.

**Exercice 53** ★★ **Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2021**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

**Exercice 54** ★

On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln^n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\mathrm{I}_n$ converge.
2. Déterminer une relation de récurence suivie par la suite $(\mathrm{I}_n)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_n$.

# Fonctions définies par des intégrales

**Exercice 55** ★★ **Fonction** $\Gamma$

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**1.** Déterminer le domaine de définition de $\Gamma$.

**2.** Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

**3.** Déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 56** ★★ **Fonction** $\mathrm{B}$ **d'Euler**

Onpose $\mathrm{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

**1.** Montrer que $\mathrm{B}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

**2.** Montrer que
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$$

**3.** Montrer que
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \mathrm{B}(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y)$$

**4.** Calculer $\mathrm{B}(n+1, p+1)$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.