

## Nature de séries

### Exercice 1 ★★★

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n} + b^n}$  où  $a, b > 0$ .

### Exercice 2 ★★★

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive. On pose  $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ . Comparer la nature des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{S_n}$ .

### Exercice 3 ★★★

#### Critère de Raabe-Duhamel

- Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de suites de réels strictement positifs vérifiant  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang. Montrer que  $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ .
- Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- On suppose  $\alpha > 1$ . A l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.
  - On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.
  - On suppose  $\alpha = 1$ . Montrer à l'aide d'exemples qu'on ne peut rien conclure en général.
- Application. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$$

### Exercice 4 ★★

Déterminer la nature des séries suivantes.

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$ .
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \right)$ .
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ .
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sqrt{n} \right)$ .

### Exercice 5 ★

Convergence de la série  $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

### Exercice 6 ★★★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$$

### Exercice 7 ★★

#### Séries de Bertrand

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et on s'intéresse à la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$ .

- On suppose  $\alpha > 1$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.
- On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
- On suppose  $\alpha = 1$  et  $\beta \leq 0$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge.
- On suppose  $\alpha = 1$  et  $\beta > 0$ . Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 2} u_n$  suivant la valeur de  $\beta$  via une comparaison à une intégrale.

**Exercice 8 ★★★****Règle de Cauchy**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs. On suppose que la suite de terme général  $\sqrt[n]{u_n}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

1. Montrer que si  $\ell < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge.
2. Montrer que si  $\ell > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples qu'on ne peut conclure dans le cas  $\ell = 1$ .

**Exercice 9 ★★**

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$  et  $(x_n)$  une suite telle que  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ .
2. En considérant la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} - x_n$ , montrer que la suite  $(x_n)$  converge.
3. En déduire que  $f$  admet un unique point fixe.

**Exercice 10 ★★****CCINP (ou CCP) PC 2021**

On pose pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \prod_{k=2}^n \left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$$

et pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$v_n = \ln \left( \frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} \right)$$

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} v_n$  converge, puis que la série  $\sum_{n \geq 3} u_n$  diverge.

**Exercice 11 ★★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $u_n \in ]0, 1]$  tel que

$$\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n$$

On pourra considérer la fonction  $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ .

2. Étudier la monotonie de  $(u_n)$  et sa limite.
3. On pose  $v_n = n + \ln u_n$ . Montrer que  $(v_n)$  converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
4. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$  ?

**Exercice 12 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2021**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle telle que :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Montrer que  $(a_n)$  est définie, puis que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n^2}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 13 ★★****Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2019**

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  à termes positifs et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  avec  $v_n$  défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$$

- Dans cette question uniquement,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$  ?
- Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \sqrt{a_n b_n}$  converge.
- Montrer que si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge.

**Exercice 14****Mines-Télécom MP 2024**

Soit  $\alpha > 0$ . Posons  $u_n = \arctan(n + \alpha) - \arctan(n)$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ . On utilisera l'inégalité des accroissements finis.

**Calculs de sommes****Exercice 15 ★★**

Montrer la convergence et calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ .

**Exercice 16 ★★★**

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$  et calcul de la somme.

**Exercice 17 ★★★****Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$  ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  pour  $x \in [0, 1]$ .

**Exercice 18 ★★**

En remarquant que  $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$ , montrer la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  et déterminer sa somme.

**Exercice 19 ★★★****X (non PC/PSI) MP 2021**

On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n k^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ .

**Exercice 20 ★★★****CCINP (ou CCP) MP 2021**

- Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si  $\sum u_n$  converge alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0.
- Soit  $(u_n)$  une suite décroissante telle que  $\sum u_n$  converge.
  - On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ . Montrer que  $\lambda = 0$ .
  - Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$ .
  - Montrer que la série  $\sum n(u_n - u_{n+1})$  converge puis montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ .

**Exercice 21 ★★**

CCINP (ou CCP) PSI 2019

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$ .

1. Calculer la limite de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $I_n + I_{n+2}$ .
3. En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .
4. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$  converge et calculer sa somme.

**Comparaison série/intégrale****Exercice 22 ★★**

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha \leq 1$ .

Déterminer un équivalent du reste de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .

**Exercice 23 ★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \ln(n!)$ .

1. Par une comparaison à une intégrale montrer que  $u_n \sim n \ln n$ .
2. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n^2}$ .
3. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .
4. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ .

**Exercice 24**

CCINP (ou CCP) MP 2023

On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $\sum u_n$  diverge.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_1^n (\ln(t))^2 dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 dt$$

3. Pour  $x \geq 1$ , calculer  $\int_1^x (\ln(t))^2 dt$  et en trouver un équivalent en  $+\infty$  en fonction de  $x \mapsto x(\ln(x))^2$ .
4. Déterminer un équivalent de  $\frac{1}{u_n}$  et en déduire la nature de  $\sum \frac{1}{u_n}$ .

**Exercice 25 ★★**

Mines Télécom PC

On pose pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \prod_{k=2}^n (2 - 3^{1/k})$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.
2. Déterminer sa limite.
3. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^{\ln 3}}$ .

**Exercice 26**

CCINP (ou CCP) MP 2022

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .
2. En étudiant la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.
3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Montrer que la série  $\sum w_n$  converge.

4. En déduire qu'il existe deux réels  $a$  et  $C$  tels que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^a}$ .

**Séries alternées****Exercice 27 ★★★**

Série des restes de la série harmonique alternée

1. Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$  converge.
2. On pose  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n$  converge.

**Exercice 28 ★★★**Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$ .

1. Déterminer un équivalent de  $b_n$ .
2. Montrer que  $(b_n + b_{n+1})$  converge vers une limite strictement négative.
3. Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{b_n}$ .

**Exercice 29 ★★**

D'après Mines-Télécom MP 2016

Soit  $(v_n)$  une suite telle que  $v_n = \frac{\cos(v_{n-1})}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer la limite puis un équivalent de  $v_n$ . En déduire la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ .
2. Montrer que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge.
3. En déduire la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n v_n$ .

**Exercice 30 ★★★**

Banque Mines-Ponts MP 2021

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ .**Exercice 31 ★★★**Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\pi \sqrt{n^2 + 1}\right)$ .**Exercice 32 ★★★**Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .**Exercice 33 ★★**

CCINP (ou CCP) PC 2019

On pose  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

1. Nature de  $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + a_n)$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=2}^n (1 + a_k)\right)$ .

**Exercice 34 ★★★**

CCINP (ou CCP) PSI 2019

1. Montrer que l'équation  $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$  a une unique solution dans  $[0, 1]$ , notée  $u_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  a pour limite 0.
3. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$  ?
4. Quelle est la nature de la série  $\sum (-1)^n u_n$  ?

**Sommation de relations de comparaison****Exercice 35 ★★**Soit  $(u_n)$  une suite réelle de limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$ .

1. Montrer que la suite de terme général  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$  converge vers  $\ell$ .
2. Déterminer la limite de la suite de terme général  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k$ .

**Exercice 36 ★★★**

Centrale-Supélec MP 2019

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = 1$$

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  converge vers 0 et que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2$  diverge.
2. On note  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt = 1$$

3. Montrer que  $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ .

**Exercice 37 ★★★**Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que la suite de terme général  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  converge vers un réel non nul.
3. En déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 38 ★★★**

Banque Mines-Ponts MP 2021

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell$$

2. Soient  $a > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 1$  et  $f : [0, a] \rightarrow [0, a]$  continue admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$$

- a. Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que 0 soit le seul point fixe de  $f$  dans  $[0, \varepsilon]$ .
- b. On définit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 \in [0, \varepsilon]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrer que  $(u_n)$  converge vers 0.
- c. Trouver un équivalent de  $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$  quand  $x$  tend vers 0.
- d. En déduire un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- e. Appliquer aux fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

**Exercice 39 ★★**Soit  $(u_n)$  la suite de premier terme  $u_0 \in ]0, 1[$  telle que  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
2. En remarquant que  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ , déterminer un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 40 ★★★**

1. Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  convergent vers  $\ell \in \mathbb{C}$ . On pose  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
Montrer que  $(v_n)$  converge également vers  $\ell$ .
2. Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des suites complexes convergent respectivement vers  $a$  et  $b$ . On pose  $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Montrer que  $(c_n)$  converge vers  $ab$ .

**Exercice 41 ★★★**

Soit  $(a_n)$  une suite de premier terme  $a_0 = 1$  telle que  $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Etudier la convergence et la limite de la suite  $(a_n)$ .
2. Etudier la convergence de la série  $\sum a_n^2$ . On pourra considérer  $a_n - a_{n+1}$ .
3. Déterminer un équivalent de  $a_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 42 ★★**

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 43 ★★★**

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

1. Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + C + o(1)$ .
2. Déterminer un équivalent de  $S_n - 2\sqrt{n} - C$ .

**Produit de Cauchy****Exercice 44 ★★★**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = H_n$$

2. En déduire que

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

**Exercice 45 ★★**

Soit  $a$  et  $b$  deux complexes distincts de module strictement inférieur à 1. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-b}$$

**Familles sommables****Exercice 46 ★**

La famille  $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$  est-elle sommable ?

**Exercice 47 ★★★**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite réelle. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

1. Montrer que  $(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$  pour tout entier  $n \geq 2$ .
2. On suppose que la série  $\sum u_n^2$  converge.
  - a. Montrer que la série  $\sum v_n^2$  converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

- b. En déduire la sommabilité de la famille  $\left(\frac{u_m u_n}{m+n}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ .

**Exercice 48 ★★★****Banque Mines-Ponts MP 2018**

1. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , calculer  $\int_0^{2\pi} t e^{-int} dt$ .
2. Soient  $I$  une partie finie de  $\mathbb{N}^*$ ,  $(a_n)_{n \in I}$  et  $(b_n)_{n \in I}$  deux suites finies de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{(n,m) \in I^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in I} a_n^2 \sum_{n \in I} b_n^2}$$

3. Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites réelles telles que les familles  $(a_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$  soient sommables. Montrer que  $\left(\frac{a_n b_m}{n+m}\right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable et que

$$\sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n^2}$$

**Exercice 49 ★★★**

Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{mn(m+n+2)}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable et calculer sa somme.

**Exercice 50 ★★**

Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est sommable et calculer sa somme.

**Exercice 51 ★★★**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Pour quelles valeurs de  $\alpha$  cette somme est-elle finie ?

**Exercice 52 ★★**

Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable.

**Exercice 53 ★★**

Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{p^2+q^3}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable.

**Exercice 54 ★★**

La famille  $\left(\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$  est-elle sommable ?

**Exercice 55 ★★★**

On note  $\tau(n)$  le nombre de diviseurs positifs d'un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) z^n$$

**Exercice 56 ★★★**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . Montrer la convergence et déterminer la somme de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

**Exercice 57 ★★**

Montrer que la famille  $\left( \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable si et seulement si  $\alpha > 2$ .

**Exercice 58 ★★**

Calculer

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

**Exercice 59 ★★★****TPE-EIVP MP 2015**

1. Montrer que la famille  $\left( \frac{1}{(p+q)^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable.
2. Déterminer la nature de la famille  $\left( \frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ .