

Suites de fonctions

Exercice 1 ★★★

ENS MP 2010

Soient $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) (P_n) converge dans $\mathbb{R}_d[X]$.
- (ii) (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$.
- (iii) (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 2 ★★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère une suite (P_n) de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f .

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p et que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 3 ★

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On suppose que la suite $(f^{(n)})$ des dérivées successives converge uniformément vers une fonction φ sur \mathbb{R} . Que peut-on dire de φ ?

Exercice 4 ★★

CCP MP

On pose $f_n : x \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
3. Soit g continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t) dt = g(0)$$

Exercice 5 ★★★★★

Théorème de Dini

1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} . Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, alors la convergence est uniforme.

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^1 x^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

Exercice 7

Soit $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto 2x(1-x) \end{cases}$. On définit la suite de fonctions (f_n) par $f_0 = \text{Id}_{[0,1]}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite (f_n) .

Exercice 8 ★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur \mathbb{R} .

Exercice 9 ★★★

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^n(x) \cos(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur \mathbb{R} .

Exercice 10 ★★★

Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

- $P_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

3. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 11 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 12 ★

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^\alpha x^n (1 - x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 13 ★

On pose $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1 + nx)}{1 + n^2 x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Sur quelle partie D de \mathbb{R} la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle simplement ?
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur D ?

Exercice 14**Banque Mines-Ponts MP 2019**

Soit f une fonction réelle continue définie sur \mathbb{R} telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq M$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n : x \mapsto \frac{f(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction h continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x + y) = h(x) + h(y)$.
3. Qu'en déduire sur h ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|h_{n+1}(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}} + |h_n(x) - f(x)|$$

En déduire que $h - f$ est bornée.

5. Conclure que f peut s'écrire comme somme d'une homothétie vectorielle et d'une fonction bornée. Unicité ?

Exercice 15 ★★**Mines-Télécom (hors Mines-Ponts) MP 2016**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice 16 ★★**ENSEA/ENSIIE MP 2016**

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-2, 2], f_n(x) = \frac{n(x^2 - 4)}{1 + n(x + 2)}$$

Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 2]$ et sur $[-2, 2]$.

Exercice 17 ★★★

On définit une suite de fonctions (f_n) en posant $f_0(x) = \sin(x)$ et $f_{n+1}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}f_n(x)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur \mathbb{R} .

Séries de fonctions**Exercice 18 ★★**

On note $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.

- Déterminer le domaine de définition D de S .
- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
- Étudier les variations de S sur D .
- Étudier les limites de S aux bornes de D .

Exercice 19 ★★**Mines-Ponts PC**

On pose $f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+x}}\right) - 2\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_{n+1} - f_n$.
- Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 .
- Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 20 ★★★

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Exercice 21 ★★★★★

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On pose $f_n : x \mapsto \sin nx$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} si et seulement si la suite (na_n) converge vers 0.

Exercice 22 ★★★**Mines-Télécom MP 2018**

- Déterminer l'ensemble de définition de la série de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
- Mêmes questions avec $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 23 ★★**Mines-Télécom MP 2017**

On définit la suite de fonctions (g_n) de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par $g_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(1-t) dt$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_{n-1}\|_\infty$.
- On pose $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
Montrer que G est bien définie sur $[0, 1]$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par G .
- En déduire l'expression de G .

Exercice 24 ★★★★★**Banque Mines-Ponts MP 2019**

- Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = k$?
- Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

Exercice 25

CCINP (ou CCP) PC 2019

Soit $t \in \mathbb{R}$ et on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{nt})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \ln(2)$.
3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$.

Exercice 26

CCINP (ou CCP) MP 2019

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$. Démontrer

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$$

4. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 27 ★

Soit $\alpha > 0$. On pose $f_n : x \mapsto e^{-n^\alpha x}$ et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la continuité de f .
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 28 ★★★

Arts et Métiers PSI

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b], f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

1. Déterminer la nature de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ sur $[a, b]$.
2. On note F la somme de cette série. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt$$

Exercice 29 ★★★★★

Centrale MP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. On note g la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
3. On pose $f : x \mapsto g(x) - \ln(x)$. Montrer que f vérifie les trois conditions suivantes :
 - (i) $f(1) = 0$.
 - (ii) f est convexe sur \mathbb{R}_+^* ;
 - (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;
4. Réciproquement, soit f vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

Exercice 30 ★★

E3A MP 2019

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer

$$2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad 2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z .

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction u_n de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur \mathcal{D} .
3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n , on note

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) dx \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) C(x) dx$$

- a. Calculer J_n puis I_n .
- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 31 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2021**

1. Etudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur \mathbb{R}_+ . On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? Converge-t-elle uniformément ?
3. Montrer que sa somme est continue sur \mathbb{R}_+ et donner sa limite en $+\infty$.
4. Résoudre $y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 32 ★★**ENSAM Option T 1996**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
2. Etudier les variations de u_n . Que peut-on conclure pour la convergence de la série $\sum u_n$? La somme S de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est-elle continue sur \mathbb{R} ?
3. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
4. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_N > 0$ tel que pour $0 < |x| \leq \alpha_N$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

En déduire la limite en 0 de $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$. S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 33**CCINP (ou CCP) MP 2023**

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on considère $f_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur \mathbb{R} .
On note S sa somme.
2. Etudier la continuité de S sur \mathbb{R} .
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \pi$.
On pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{2x}{x^2 + t^2}$.

Exercice 34 ★★

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + (x \sin x)^2}$ pour tout $x \in] -1, 1[$.
4. En déduire que $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35 ★★**CCINP (ou CCP) MP 2023**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = n^x e^{-nx}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S .
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 36**Banque Mines-Ponts MP 2023**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$$

On définit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie ? Continue ?
2. Trouver un équivalent de f en 0^+ , puis en $+\infty$.
3. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 37 ★★Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans \mathbb{K} .

1. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X . Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. Montrer que la série $\sum f_{n+1} - f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite (f_n) converge uniformément sur X .

Séries alternées**Exercice 38 ★★****CCINP (ou CCP) MP 2018**Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudier sa convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* .
3. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Exercice 39 ★★**CCINP (ou CCP) PC 2017**On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. f est-elle bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* ?
2. Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

3. Montrer que

$$\forall x > 0, 2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+ .
6. Montrer que :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Exercice 40 ★★**Fonction ζ alternée**On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S .
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in D$,

$$2S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n(x)$$

$$\text{avec } u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

4. En déduire la limite de S en 0^+ .

Exercice 41

CCINP (ou CCP) MP 2021

$$\text{Soit } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

2. À l'aide du critère spécial des séries alternées, trouver la monotonie de S .
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

puis en déduire un équivalent simple de S en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 42 ★★★

$$\text{On pose } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \text{ pour } x > 0.$$

- Justifier que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Étudier la limite de S en $+\infty$.
- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 43 ★★

E3A PSI 2020

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in J$.

2. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J .

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Exercice 44

CCINP MP 2022

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.2. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln(x) dx}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 45 ★★On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.1. Montrer que f est bien définie sur $]1, +\infty[$.2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 1.3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.**Approximations****Exercice 46 ★★★**Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$. Que peut-on dire de f ?**Exercice 47 ★★★****Lemme de Riemann-Lebesgue**On considère un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et un espace vectoriel normé de dimension finie E .1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = 0$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

3. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} à valeurs dans E . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Exercice 48**Banque Mines-Ponts MP 2018**Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit E l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme infinie. Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour cette norme. Soit enfin $f \in E$. Montrer que

$$\sup_{g \in B} \int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt$$