Familles libres, liées, génératrices et bases

Exercice 1 ★

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et a, b, c trois vecteurs de l'espace E.

1. Soient $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ quatre scalaires. Critiquer l'implication suivante,

$$\lambda a + \mu b = \lambda' a + \mu' b \implies \lambda = \lambda' \text{ et } \mu = \mu'.$$

2. Critiquer l'implication suivante,

$$(a, b) \text{ liée} \implies b \in \text{vect}(a).$$

3. Critiquer l'implication suivante,

$$(a, b, c) \text{ liée} \implies c \in \text{vect}(a, b).$$

Exercice 2 ★★

Soient $m \in \mathbb{R}$. Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur m pour que la famille

$$(m, 1, 1), \quad (2m, -1, m), \quad (1, 5, 2)$$

soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 ★

Montrer de deux manières que la famille

$$x \mapsto e^x \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto \ln(x)$$

est libre dans l'espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 — Etude d'une famille

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$. Déterminer une CNS pour que (u, v, w) soit libre dans $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5 ★

Parmi les familles suivantes, déterminer les familles génératrices de $\mathbb{R}^3$:

1. $(u_1, u_2) = \big((1, 2, 3), (2, 1, 0)\big)$;
2. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, 1, 1), (0, 1, 2), (3, 2, -1)\big) ;$$
3. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\big) ;$$
4. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, -1, 1), (-1, 1, -1), (2, 3, -1)\big) ;$$
5. (u_1, u_2, u_3) vaut
$$\big((1, 2, -1), (1, -3, 4), (3, 1, 2)\big) ;$$
6. (u_1, u_2, u_3, u_4) vaut
$$\big((1, 0, 3), (0, 2, 1), (3, 1, 1), (2, 1, -1)\big).$$

Exercice 6

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$e_1 = (1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad e_2 = (1, -2, 3, -4).$$

1. Peut-on déterminer x et y pour que
$$(x, 1, y, 1) \in \text{vect}(e_1, e_2) \quad ?$$
2. Même question pour $(x, 1, 1, y) \in \text{vect}(e_1, e_2)$?

Exercice 7

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 8

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto |x - a|$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

1. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_m(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 10

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $f : x \mapsto \sin(x+a)$, $g : x \mapsto \sin(x+b)$ et $h : x \mapsto \sin(x+c)$. Déterminer le rang de la famille (f, g, h).

Exercice 12

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. La famille $(v_1 - v_2, v_2 - v_3 \dots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1)$ est -elle libre ?
2. La famille $(v_1 + v_2, v_2 + v_3 \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1)$ est -elle libre ?
3. On pose $w_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} v_j$. La famille $(w_1, \dots, w_n)$ est-elle libre ?

Exercice 13 ★★

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre d'un espace vectoriel E et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur les α_i pour que $(y + x_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une famille libre.

Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 14 ★★ **Calculs de coordonnées**

Soient F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par l' équation

$$x + z = t + y,$$

et G défini par $y + t = x - y - z = 0$.

1. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F. Soit $a = (3, 1, 2, 4)$. Déterminer les coordonnées de a dans cette base.
2. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de G. Soit $b = (4, 1, 3, -1)$. Déterminer les coordonnées de b dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Exercice 15 ★ **EDL et espaces vectoriels**

Revenons un instant aux équations différentielles …

1. Soit
$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \mathcal{C}^2 \mid y'' + y' + y = 0 \right\}.$$
Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
3. Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par la condition suivante,
$$f'' + 4f = 0,\ \ f(\pi) = 0.$$

Exercice 16 ★ **Basique**

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations suivantes,

$$x = 2y - z\ \ ,\ \ t = x + y + z.$$

Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Exercice 17 ★ **Calculs de rangs**

Courage !…

1. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad b = (-1, 1, 1)?$$
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (3, 0, -2) \ , \ b = (0, 3, 1) \ \text{ et } \ c = (-1, 4, 2)?$$
3. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs
$$a = (1, 1, -2) \ , \ b = (1, 3, 1) \ , \ c = (-2, 1, 2),$$
$$d = (1, -1, 1), e = (0, 1, 2), f = (-3, 1, 0), g = (4, 5, 1)?$$

Exercice 18 ★

Le corps $\mathbb{C}$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel…

1. Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur lui-même. Quels sont alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$?
2. Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Décrire alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.

Exercice 19 ★

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites arithmétiques ? En déterminer une base.

Exercice 20 **Un plan de $\mathbb{K}^4$**

Soit
$$F = \{(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu, 2\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.
2. Déterminez la dimension de F.

Exercice 21 **Premiers calculs**

Expliquez pourquoi les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminez leurs dimensions.

1. $E = \text{vect}((1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 1, 1))$;
2. $F = \{(x, y, z) \mid x = y\}$;
3. $G = \{(x, y, z) \mid x + 3y = y + z = 2x - z = 0\}$;
4. $H = \{(x, y, z) | x + 3y = y + z = x + 2y - z = 0\}$;
5. $L = \{(x, y, z) \mid x + 3y = y + z = 2x - z\}$.

Exercice 22

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille de vecteurs suivante :
$$u_1 = (1, 2, -1, 3), \ \ u_2 = (2, 3, -3, 2,), \ \ u_3 = (0, 1, 1, 4)$$
et $u_4 = (1, 0, -3, -5)$. Déterminer le rang de cette famille, préciser les relations de liaison entre ces vecteurs et donner une base de $\text{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 23 ★ **Supplémentaire commun**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E si et seulement si $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 24 **Rang d'une famille de vecteurs**

On pose
$$u_1 = (\alpha, 1, \beta, 1), \ \ u_2 = (1, \alpha, \beta, \alpha), u_3 = (\alpha, \beta, \alpha, 1),$$
$$u_4 = (\alpha, \beta, \alpha, \beta), \ \ u_5 = (1, \alpha, 1, \beta),$$
pour α et β réels. Discuter le rang du système $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

Exercice 25 ★ **Intersection de deux hyperplans**

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Prouver que $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Exercice 26 ★★★

Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ une subdivision de $[0;1]$ et F l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est affine. Donner la dimension de F ainsi qu'une base.

Exercice 27 ★★ **Espaces vectoriels de dimension infinie**

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $u_i = (\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(u_0, u_1, \dots, u_k)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire quant à la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto x^i$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 28 ★★★

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note E_p l'ensemble des suites réelles p-périodiques.

1. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit la suite u^k par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que $(u^0, u^1, \dots, u^{p-1})$ est une base de E_p.
3. Que peut-on en déduire quant à la dimension de E_p ?
4. Justifier que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_4.
5. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_4.
6. Montrer que F est un supplémentaire de E_2 dans E_4.

Exercice 29 ★

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

Exercice 30 ★

Soient F et G deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On suppose F et G distincts. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?

Exercice 31 ★★

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déduire sa dimension.

Exercice 32 ★★

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \; y'' = (1+x^2)y$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient f et g les applications définies par
$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = e^{x^2/2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$
Montrer que f et g appartiennent à F.
3. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit h un élément de F. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$. On pourra calculer la dérivée de la fonction $\dfrac{h}{f}$.
5. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(f,g)$.
6. En déduire la dimension de F.

Sommes et dimension

Exercice 33

Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles et $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid \forall k \in [\![1,10]\!],\; f\left(\frac{1}{k}\right) = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 34

1. Dans cette question, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{F} = \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\big((1,1,1)\big)$.
   - **a.** Donner la dimension de G.
   - **b.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F. En déduire sa dimension.
   - **c.** Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   - **d.** On pose $a = (1,2,3)$. Déterminer la projection de a sur F parallélement à G et la projection de a sur G parallélement à F.
2. On se donne maintenant $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F} = \left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\big((1,\dots,1)\big)$.
   - **a.** Donner la dimension de G.
   - **b.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F. En déduire sa dimension.
   - **c.** Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. On suppose maintenant que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne F un hyperplan de E et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(u)$ où $u\in\mathrm{E}\setminus\mathrm{F}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 35 **Calculs de projections**

On note $E = \mathbb{R}^4$,

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid z = t = 0\right\}$$

et on pose $F = A \cap B$ où

$$A = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\right\}$$

et

$$B = \left\{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - y + 3z - 4t = 0\right\}.$$

1. Prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Trouver une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe.
3. Calculer la projection sur F parallèlement à G d'un vecteur (x, y, z, t) de E. Même question en permutant F et G.

Exercice 36 **Projections**

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \left\{(x, y, z) \in E \mid x + z = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z) \mid x = 2y = z\right\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Calculer la projection du vecteur $X = (x, y, z)$ de E sur F parallèlement à G.

Exercice 37 ★ **Supplémentaires d'un hyperplan**

Soient $n \geqslant 2$, H le sous-ensemble de $E = \mathbb{R}^n$ défini par l'équation

$$x_1 + \dots + x_n = 0,$$

et $u = (1, \dots, 1) \in E$.

1. H et $\mathbb{R}u$ sont-ils supplémentaires dans E ?
2. Soit $v \notin H$. Que dire de $\mathbb{R}v$?