ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Produits scalaires

Exercice 1 ★★

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur E :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts,
$$\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k) ;$$
2. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
$$(P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k) ;$$
3. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$,
$$(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt ;$$
4. pour $n \in \mathbb{N}$, sur $E = M_n(\mathbb{R})$,
$$\langle A|B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) ;$$
5. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt ;$$
6. sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,
$$(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

Inégalités

Exercice 2 ★ — Un espace fonctionnel

On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,
$$\langle f|g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Etablir que $\forall f \in E$,
$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)$$

Exercice 3 ★★ — Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien. On pose $f : \begin{array}{rcl} E \setminus \{0\} & \to & E \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array}$.

1. Montrer que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$.
2. Soient $a, b, c, d \in E$. Montrer que
$$\|a - c\|\|b - d\| \leq \|a - b\|\|c - d\| + \|b - c\|\|a - d\|.$$

Exercice 4 ★★★ — Inégalité d'Hadamard

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que
$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Exercice 5 ★

Soit $n \geqslant 1$. Prouver que

$$\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]^2 \leqslant n\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right].$$

Exercice 6 ★ **Immédiat**

Soient $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Prouver que

$$\left[\sum_{k=1}^n x_k\right]\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right] \geqslant n^2.$$

Exercice 7 ★★ **Technique**

Soit $n \geqslant 2$. Prouver que

$$\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}.$$

Exercice 8

On considère l'ensemble E des fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\inf_{f\in \mathrm{E}}\left(\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

existe et est atteint.

Exercice 9

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(a)=0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)du.$$

Bases orthonormales

Exercice 10 ★★ **Produit mixte et produit vectoriel**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
2. En déduire que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E. Montrer que l'application
$$x \in \mathrm{E} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$
est une forme linéaire sur E.
4. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{E}$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle u, x\rangle$$
On appelle u le produit vectoriel des vecteur $x_1, \dots, x_{n-1}$ et on note
$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
5. Montrer que l'application
$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{E}^{n-1} \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$$
est une application $n-1$-linéaire alternée.

Exercice 11 ★★★

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2,\ \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)\mathrm{Q}^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Donner sans calcul une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 12 ★★★

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E tels que

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle^2$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \langle y \mid e_i \rangle$$

2. En déduire que
$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$$

3. Etablir que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 13 ★ **Retour aux polynômes**

Sur l'espace vectoriel réel $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on définit

$$\langle \mathrm{P} | \mathrm{Q} \rangle = \mathrm{P}(-1)\mathrm{Q}(-1) + \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. Trouver une base orthonormée de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique de E.

3. Trouver une *autre* base orthonormée de E en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Sous-espaces orthogonaux

Exercice 14 ★ **Posé à Centrale**

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

1. Prouver $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On pose
$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0\}.$$
   a. Soit $f \in \mathrm{F}^\perp$. Montrer que $f^2 \in \mathrm{F}^\perp$.
   b. Prouver que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$.

3. E est-il de dimension finie ?

Exercice 15 ★★

Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array} \right.$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire défini par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ pour $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 ★★

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.

Exercice 17 ★★

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$ et que, si F et G sont de dimension finie, $G^\perp \subset F^\perp \implies F \subset G$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et que, si E est de dimension finie, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Projecteurs orthogonaux

Exercice 18 ★★

Soit u un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. On note U le vecteur colonne représentant u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 19 ★★ **Caractérisations des projections orthogonales**

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;
2. $\forall x, y \in E,\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;
3. $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 20 ★ **Calcul d'une projection orthogonale**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F d'équations,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Optimisation

Exercice 21 ★ **Un calcul de distance**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique (ie la base canonique est orthonormée). On note F le sous-espace vectoriel de E des polynômes s'annulant en 1.

1. Déterminer une base de F.
2. Calculer $\delta = \inf_{P \in F} \|X - P\|$.

Exercice 22 ★★★

Calculer le minimum de $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,dx \end{array}$.

Exercice 23 ★★★

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) du produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. On se donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On pose $E = \left\{\|AX - B\|^2,\ X \in cM_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $K = \inf E$.

1. Justifier l'existence de K.
2. On considère le système linéaire $(\mathcal{S}) :\ AX = B$. On appelle *pseudo-solution* de $\mathcal{S}$ tout élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AY - B\|^2 = K$. Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution, les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.
3. On associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}') :\ A^\top AX = A^\top B$. Montrer qu'un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il est solution de $(\mathcal{S}')$.
4. Montrer que $\text{rg}\, A^\top A = \text{rg}\, A$.
5. Montrer que si $\text{rg}\, A = n$, $(\mathcal{S})$ admet une unique pseudo-solution.

Exercice 24 ★★★ **ENS MP 2010**

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en un unique point que l'on précisera.

Exercice 25 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum en $m = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$.

Familles de vecteurs

Exercice 26 ★★★ **Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. A une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $G_p(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1\le i,j\le p}$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G_p(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On suppose maintenant que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et on note $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_p)$.
   - **a.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G_p(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.
   - **b.** En déduire que $\det G_p(x_1, \dots, x_p) > 0$.
3. Soit $x \in E$. On note π la projection orthogonale sur F.
   - **a.** Montrer que $\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p) = \det G_{p+1}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.
   - **b.** Montrer que
$$d(x, F)^2 = \frac{\det G_{p+1}(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G_p(x_1, \dots, x_p)}$$

Exercice 27 ★★★

Soient E un espace euclidien, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E tels que

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ i \neq j \implies \langle x_i, x_j\rangle < 0$$

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$. On pose $I = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_i > 0\}$ et $J = \{j \in [\![1, p-1]\!] \mid \alpha_j < 0\}$. En considérant $u = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ et $v = \sum_{j\in J} \alpha_j x_j$, montrer que l'un des ensembles I ou J est vide (on convient qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle).
2. Montrer que I et J sont vides.
3. En déduire que la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Exercice 28 ★★★ **Déterminants de Gram**

Soit E un espace euclidien. A toute famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1\le i,j\le p}$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_p)$. On note $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.
2. En déduire que $\det G(x_1, \dots, x_p) \ge 0$ et que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$.
3. On se donne $x \in E$. Montrer que
$$\det G(x_1, \dots, x_p, x) = d(x, F)^2 \det G(x_1, \dots, x_p)$$

Exercice 29 ★★★

On pose $Q_n = (1-X^2)^n = (1+X)^n(1-X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On notera $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ par la suite.
2. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k < n$. Montrer que $Q_n^{(k)}(-1) = Q_n^{(k)}(1) = 0$.
3. On pose $P_n = Q_n^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Endomorphismes remarquables

Exercice 30 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle = 0$$

On note A(E) l'ensemble des applications antisymétriques de E.
REMARQUE. Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !

1. Soit $u \in A(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que A(E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in A(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est l'orthogonal de $\operatorname{Ker} u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est également stable par u.

Exercice 31 ★★

Soient E un espace euclidien, p une projection orthogonale et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Montrer que la matrice A de p dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Exercice 32 ★★★

Montrer que le rang d'une matrice antisymétrique réelle est pair.

Exercice 33 ★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \langle u(x) | x \rangle = 0.$$

Montrer que

$$(\operatorname{Ker}(u))^\perp = \operatorname{Im}(u).$$

Exercice 34 ★★

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit (a, b) une famille libre de E. Soit f l'application

$$x \longmapsto \langle a | x \rangle b + \langle b | x \rangle a.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle.$$
2. Déterminer le noyau et le rang de f.
3. On pose $F = \operatorname{Im}(f)$.
   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et en donner une base.
   b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur F dans cette base.

Exercice 35 ★★★ **Endomorphismes 1-lipschitziens**

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Etablir que

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}}).$$

Divers

Exercice 36 ★★★

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des vecteurs non nuls de E faisant un angle constant α_n (non nul) deux à deux. Que vaut α_n ?

Exercice 37 ★★★

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}\mathrm{A}^\top) = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$.

Exercice 38 ★★★

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ en posant

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

pour $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \mathrm{X}^n$.

2. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(1 + \mathrm{X}^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Conclusion ?