FONCTIONS USUELLES

Exponentielles et logarithmes

Exercice 1 ★ **Equations aux puissances**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2^x + 3^x = 5$;
2. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

Exercice 2 ★ **Une suite de fonctions**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction définie par

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}.$$

1. Discuter la limite à x fixé, de la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n admet un maximum sur $\mathbb{R}$ que l'on notera u_n.
3. Discuter la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3 ★ **Une limite à connaître**

Prouver que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

Exercice 4 ★ **Optimisation**

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 ★★★

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et $a < b$ tels que $a^b = b^a$.

Exercice 6 ★★

Prouver que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 ★

Soient $0 < a < b$. Prouver que, $\forall x > 0$,

$$ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

Exercice 8 ★

Etudier en $+\infty$ les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{1/n}$
2. $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{1/n^2}$
3. $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\ln(n)}$
4. $\dfrac{n}{(\ln(n))^{-\ln n}}$

Exercice 9 ★

Déterminer les limites en $\pm\infty$ des expressions suivantes :

1. $x^2e^{-3x}4^x$
2. $x^2 4^x$
3. x^2e^{-x}
4. 4^xe^{-x}

Exercice 10 ★ **Etude d'une suite de fonctions**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$? Prouver que f_n admet un maximum sur $[0, 1]$, noté u_n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 11 ★★

Soit $\lambda > 0$. On pose $f(x) = e^{\lambda x}$ et on considère l'équation (E) suivante :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x$$

1. Étudier les variations et les limites de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de (E).
3. Montrer que, réciproquement, si x est solution de (E) alors $f(x) = x$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
5. En déduire, selon les valeurs de λ le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 12 ★★

Résoudre l'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$.

Fonctions trigonométriques et réciproques

Exercice 13 ★

Tracer la courbe de

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Exercice 14 ★★

Tracer le graphe des fonctions définies par

1. $x \mapsto \arccos(\cos(x)) - \dfrac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.

Exercice 15 ★★

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

1. Prouver que $x = 5$ est solution.
2. Conclure.

Exercice 16 ★

Tracer les graphes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \sin^4(x) + \cos^4(x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sin^5(x) + \cos^5(x).$$

Exercice 17 ★

On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

1. La fonction f est-elle bien définie ?
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$ avec $0 \leqslant \theta < \pi$.
3. Soit $x \geqslant 0$. Simplifier $f(x)$ en posant $x = \tan^2(\theta/2)$ avec $0 \leqslant \theta < \pi$.

Exercice 18 ★★

On pose $y = \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Calculer $\cos(4y)$ et en déduire la valeur de y.

Exercice 19 ★★

Soient a et b deux nombres réels positifs. Prouver qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(c).$$

Exprimer c en fonction de a et b.

Exercice 20 ★ **La formule de Machin**

Prouver l'égalité suivante :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 21 ★

Prouver l'égalité suivante :

$$\arctan(3)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 22 ★

Prouver que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\arctan(x)+2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 23 ★★

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arctan(2x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{4}.$$

1. Montrer que *si x est solution*, alors *nécessairement* x vérifie l'équation $2x^2+3x-1=0$.
2. Etudier *la réciproque*.

Exercice 24 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arcsin(\tan(x))=x$.
2. $\arcsin(x)+\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 25 ★ **Le cercle n'est pas loin**

Prouver que, $\forall x\in]-1,1[$,

$$\arcsin(x)=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Exercice 26 ★★

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose pour tout réel $x\in[-1,1]$:

$$f_n(x)=\cos\left(n\arccos(x)\right).$$

Montrer que f_n est une fonction polynomiale.

Exercice 27 ★

On souhaite établir que $\forall x\in[0,1]$:

$$\arcsin(\sqrt{x})=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

1. *Première méthode* : en utilisant la dérivation.
2. *Seconde méthode* : en utilisant les formules de trigonométrie. On pourra poser $x=\sin^2(u)$.

Exercice 28 ★★

Simplifier les expressions suivantes (il ne doit plus figurer de fonctions trigonométriques directes et réciproques) :

$$f(x)=\sin(\arctan x)\qquad\qquad g(x)=\cos(\arctan x)$$

Exercice 29 ★★

Résoudre l'équation :

$$\arccos x=\arcsin 2x$$

Exercice 30 ★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. On raisonnera *avec soin*.

1. $\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$.
2. $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.
3. $\arccos x = \arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}$.
4. $\arcsin x = \arctan 2x$.
5. $\arcsin 2x = \arctan x$.

Exercice 31 ★★★

Comparer $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$.

Exercice 32 ★★

On considère la fonction numérique f telle que $f(x) = (x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et mettre $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$.
4. Etudier g et en déduire le tableau de variations de f.

Exercice 33 ★★

1. Que vaut $\tan\frac{\pi}{6}$? Rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.
2. Montrer que parmi 7 réels quelconques, il en existe toujours deux notés x et y vérifiant $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 34 ★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 35 ★★

On note $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Justifier que f induit une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
4. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution dans I. On ne cherchera pas à résoudre cette équation dans cette question.
5. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 36 ★★

Tracer les graphes des fonctions $\arcsin\circ\sin$ et $\arccos\circ\cos$.

Exercice 37 ★★

Tracer les graphes des fonctions $f = \arcsin\circ\cos$ et $g = \arccos\circ\sin$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
On justifiera ces tracés.

Fonctions hyperboliques

Exercice 38 ★

Résoudre $\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 39 ★ **Sommes hyperboliques**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(ka+b) \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(ka+b).$$

Exercice 40 ★

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Exercice 41

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Prouver que

$$e^a - e^b = 2\,e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et

$$e^a + e^b = 2\,e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Exercice 42 ★ **Somme hyperbolique**

L'objectif de cet exercice est de simplifier une somme hyperbolique.

1. Montrer que pour tout réel x, on a

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)},$$

et en déduire que pour tout réel x non nul,

$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x).$$

2. a étant un réel strictement positif et n un entier naturel, simplifier

$$\Lambda_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k a).$$

Exercice 43 ★ **Une formule trigo-expo**

Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(e^x) = \arctan(\operatorname{th}(x/2)) + \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 44 ★★

On pose

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

1. Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \ f(x) = -g(x).$$

Exercice 45 ★★

On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$ et $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1. Vérifier que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Sur quels domaines sont elles dérivables ?

2. Calculer f' et g' sur leurs domaines de définition, et en déduire que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \geq 0$. Quelle relation existe-t-il entre $f(x)$ et $g(x)$ pour $x < 0$?

Exercice 46 ★★

Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\right) = \frac{|x|}{2}$$

Exercice 47 ★★

On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th} x)$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f.

2. Montrer que f' est nulle sur son domaine de dérivabilité.

3. Montrer que $\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.