Fractions rationnelles, sous-espaces affines

Solution 1

1. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et ils sont simples donc :
$$\frac{1}{X^n-1}=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{a_\omega}{X-\omega}$$
avec
$$a_\omega=\frac{1}{(X^n-1)'(\omega)}=\frac{1}{n\omega^{n-1}}=\frac{\omega}{n}$$

2. De la même façon,
$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{a_\omega}{X-\omega}$$
avec
$$a_\omega=\frac{X^{n-1}(\omega)}{(X^n-1)'(\omega)}=\frac{\omega^{n-1}}{n\omega^{n-1}}=\frac{1}{n}$$

3. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Pour $\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}$, le pôle ω est simple donc le coefficient de $\dfrac{1}{X-\omega}$ dans la décomposition en éléments simples est :
$$\begin{aligned}a_\omega &= \frac{1}{[(X-1)(X^n-1)]'(\omega)}\\ &= \frac{1}{(X^n-1+n(X-1)X^{n-1})(\omega)}=\frac{\omega}{n(\omega-1)}\end{aligned}$$
Notons a_1 et b_1 les coefficients respectifs de $\dfrac{1}{X-1}$ et $\dfrac{1}{(X-1)^2}$ dans la décomposition en éléments simples. On remarque que
$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}=\frac{1}{(X-1)^2(1+X+\dots+X^{n-1})}$$
donc en multipliant par $(X-1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on obtient $b_1=\dfrac{1}{n}$. Enfin, on obtient a_1 en dérivant $\dfrac{1}{1+X+\dots+X^{n-1}}$ et en prenant la valeur en 1 :
$$a_1=-\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n^2}=\frac{1-n}{2n}$$

Solution 2

La décomposition en éléments simples de F est du type :
$$F=\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{X^k}+\sum_{k=1}^n\frac{b_k}{(1-X)^k}$$
Le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ en 0 à l'ordre $n-1$ est :
$$\frac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k}x^k$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}x^nF(x) &= \sum_{k=1}^n a_kx^{n-k}+x^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{b_k}{(1-x)^k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}x^k+o(x^{n-1})\end{aligned}$$
Par unicité du développement limité, on en déduit $a_k=\binom{n+k}{k}$ pour $1\le k\le n$. De plus, $F(1-X)=F(X)$ donc $b_k=a_k$ pour $1\le k\le n$.

Solution 3

1. La partie entière de F est 1. F admet deux pôles simples 1 et 2. Par conséquent la DES de F est :

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}+5}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)} = 1 + \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{\mathrm{X}-1}$$

De plus,

$$(\mathrm{X}-1)\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}+5}{\mathrm{X}-2}$$

En substituant 1 à X, on trouve $a = -8$.
De même,

$$(\mathrm{X}-2)\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}+5}{\mathrm{X}-1}$$

En substituant 2 à X, on trouve $b = 13$.
La DES de F est donc :

$$\mathrm{F} = 1 - \frac{8}{\mathrm{X}-1} + \frac{13}{\mathrm{X}-2}$$

2. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles doubles conjugués i et $-i$. Comme F est à coefficients réels, la DES de F est :

$$\mathrm{F} = \frac{4}{(\mathrm{X}-i)^2(\mathrm{X}+i)^2} = \frac{a}{(\mathrm{X}-i)^2} + \frac{b}{\mathrm{X}-i} + \frac{\overline{a}}{(\mathrm{X}+i)^2} + \frac{\overline{b}}{\mathrm{X}+i}$$

On a

$$(\mathrm{X}-i)^2\mathrm{F} = \frac{4}{(\mathrm{X}+i)^2}$$

En substituant i à X, on trouve $a = -1$.
De plus,

$$\left[(\mathrm{X}-i)^2\mathrm{F}\right]' = -\frac{8}{(\mathrm{X}+i)^3}$$

En substituant i à X, on trouve $b = -i$.
La DES de F est donc :

$$\mathrm{F} = -\frac{1}{(\mathrm{X}-i)^2} - \frac{i}{\mathrm{X}-i} - \frac{1}{(\mathrm{X}+i)^2} + \frac{i}{\mathrm{X}+i}$$

3. La partie entière de F est nulle. F admet un pôle simple 0 et un pôle triple 1. La DES de F est :

$$\mathrm{F} = \frac{a}{(\mathrm{X}-1)^3} + \frac{b}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{c}{\mathrm{X}-1} + \frac{d}{\mathrm{X}}$$

On évalue $(\mathrm{X}-1)^3\mathrm{F} = \frac{1}{\mathrm{X}}$ en 1 et on trouve $a = 1$.
On pose alors

$$\mathrm{G} = \mathrm{F} - \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^3} = -\frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)^2}$$

et la DES de G est :

$$\mathrm{G} = \frac{b}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{c}{\mathrm{X}-1} + \frac{d}{\mathrm{X}}$$

On évalue $(\mathrm{X}-1)^2\mathrm{G} = -\frac{1}{\mathrm{X}}$ en 1 et on trouve $b = -1$.
On évalue $\left[(\mathrm{X}-1)^2\mathrm{G}\right]' = \frac{1}{\mathrm{X}^2}$ en 1 et on trouve $c = 1$.
On évalue enfin $\mathrm{XF} = \dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^3}$ en 0 et on trouve $d = -1$.
La DES de F est donc :

$$\mathrm{F} = \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^3} - \frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} + \frac{1}{\mathrm{X}-1} - \frac{1}{\mathrm{X}}$$

4. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles simples i et $-i$. Comme $2X = (X+i)+(X-i)$, la DES de F est :

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$$

5. La partie entière de F est nulle. Elle admet deux pôles simples conjugués j et $\overline{j}$. Comme F est à coefficients réels :

$$F = \frac{1}{(X-j)(X-\overline{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-\overline{j}}$$

On évalue $(X-j)F = \frac{1}{X-\overline{j}}$ en j et on trouve $a = \frac{1}{j-\overline{j}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$. La DES de F est donc :

$$F = -\frac{i\sqrt{3}}{3(X-j)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(X-\overline{j})}$$

6. La partie entière de F est nulle. F admet deux pôles triples 1 et -1. La DES de F est :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}$$

Comme F est impaire, on a $d = a$, $e = -b$ et $f = c$. On évalue $(X-1)^3F = \frac{X}{(X+1)^3}$ en 1 et on trouve $a = \frac{1}{8}$ et donc $d = \frac{1}{8}$.
On a $XF = \frac{X^2}{(X-1)^3}$. En considérant la limite en $+\infty$, on trouve $c + f = 0$ i.e. $2c = 0$ et donc $c = f = 0$.
En évaluant F en 2, on obtient $b = -\frac{1}{16}$.
La DES de F est donc :

$$F = -\frac{1}{16(X-1)^2} + \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{16(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3}$$

Solution 4

Posons $F = -\frac{P'}{P}$. On a

$$F' = \frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \frac{Q}{P^2}$$

Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de P. On sait que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-x_k}$$

Et donc

$$F' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-x_k)^2}$$

Par conséquent,

$$Q = P^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-x_k)^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$. On a donc $Q(x) > 0$. De plus, pour $1 \leq k \leq n$,

$$Q(x_k) = P'(x_k)^2 > 0$$

car x_k étant une racine simple de P, il n'est pas racine de P'. Finalement, $Q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que Q n'a pas de racines réelles.

Solution 5

1. On peut démontrer l'existence par récurrence ou à l'aide de la formule de Moivre. Utilisons cette dernière méthode.

$$\begin{aligned} e^{ni\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin^k\theta\cos^{n-k}\theta \\ &= \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta + i\sum_{0\le 2k+1}\binom{n}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k-1}\theta \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta \end{aligned}$$

On a donc

$$\cos n\theta = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(\cos^2\theta-1)^k\cos^{n-2k}\theta$$

Il suffit donc de prendre $\mathrm{T}_n = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(\mathrm{X}^2-1)^k\mathrm{X}^{n-2k}$.

Démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et $\tilde{\mathrm{T}}_n$ vérifiant la condition de l'énoncé. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, T_n et $\tilde{\mathrm{T}}_n$ coïncident sur $[-1,1]$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{T}_n = \tilde{\mathrm{T}}_n$.

Chaque terme de la somme définissant T_n est degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2k}$. La somme de ces coefficients étant non nulle, on en déduit que $\deg \mathrm{T}_n = n$.

2. Remarquons que $\cos n\theta$ s'annule pour $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc $\mathrm{T}_n(\cos\theta_k) = 0$. Pour $0 \le k \le n-1$, $\theta_k \in [0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$, ce qui prouve que les $x_k = \cos\theta_k$ pour $0 \le k \le n-1$ sont n racines *distinctes* de T_n. Or $\deg \mathrm{T}_n = n$. Les x_k pour $0 \le k \le n-1$ sont donc exactement les racines de T_n.

3. Pour $n = 0$, $\mathrm{T}_0 = 1$. Donc $\frac{1}{\mathrm{T}_0} = 1$. Supposons $n \ge 1$. Alors $\deg \frac{1}{\mathrm{T}_n} < 0$ et la partie entière de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est nulle. Tous les pôles de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X}-x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est $\frac{1}{\mathrm{T}_n'(x_k)}$. Dérivons l'identité $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. On obtient $-\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\sin\theta = -n\sin n\theta$. On a donc $\mathrm{T}_n'(x_k)\sin\theta_k = n\sin n\theta_k$. Or pour $0 \le k \le n-1$, $\theta_k \in]0,\pi[$ donc $\sin\theta_k \ne 0$ et $\sin n\theta_k = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k$. On en déduit $\mathrm{T}_n'(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin\theta_k}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est donc

$$\frac{1}{\mathrm{T}_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\theta_k}{\mathrm{X}-\cos\theta_k}$$

Solution 6

1. On montre l'existence par récurrence double. Soit $\mathrm{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence :

   «Il existe un polynôme $\mathrm{A}_n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}$.»

   $\mathrm{HR}(0)$ et $\mathrm{HR}(1)$ sont vraies : il suffit de prendre $\mathrm{A}_0 = 2$ et $\mathrm{A}_1 = \mathrm{X}$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ et $\mathrm{HR}(n+1)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\mathrm{X}^{n+2} + \frac{1}{\mathrm{X}^{n+2}} = \left(\mathrm{X}^{n+1}+\frac{1}{\mathrm{X}^{n+1}}\right)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) - \left(\mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}\right)$. Il suffit donc de prendre $\mathrm{A}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n$. $\mathrm{HR}(n+2)$ est donc vraie et on conclut par récurrence double.

   Supposons qu'il existe deux polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ vérifiant la conidtion de l'énoncé. Comme l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\frac{1}{x} \end{array}\right.$ est surjective, les polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{A}_n = \tilde{\mathrm{A}}_n$.

2. Les racines de l'équation $z^n + \frac{1}{z^n} = 0$ sont les racines $2\mathrm{N}^{\text{èmes}}$ de -1, à savoir les $z_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ pour $0 \le k \le 2n-1$. On en déduit que les $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$ sont des racines de A_n. On trouve alors $x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $0 \le k \le n-1$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$: les x_k pour $0 \le k \le n-1$ sont donc deux à deux distincts. A_n possède donc n racines distinctes. Or l'égalité définissant A_n montre que A_n est de degré n. Les x_k pour $0 \le k \le n-1$ sont donc exactement les racines de A_n.

3. Pour $n = 0$, $\dfrac{1}{A_0} = \dfrac{1}{2}$. Supposons $n \geq 1$. Alors $\deg \dfrac{1}{A_n} < 0$. La fraction rationnelle $\dfrac{1}{A_n}$ admet donc une partie entière nulle. De plus, tous les pôles de $\dfrac{1}{A_n}$ sont simples et le coefficient de $\dfrac{1}{X - x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{A_n}$ est $\dfrac{1}{A_n'(x_k)}$. En dérivant l'identité $A_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{X^2}\right) A_n'\left(X + \frac{1}{X}\right) = n\left(X^{n-1} - \frac{1}{X^{n+1}}\right)$$

En substituant z_k à X et en utilisant le fait que $x_k = z_k + \dfrac{1}{z_k}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{z_k^2}\right) A_n'(x_k) = n\left(z_k^{n-1} - \frac{1}{z_k^{n+1}}\right)$$

Comme les z_k sont des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, $z_k^2 \neq 1$ et donc $1 - \dfrac{1}{z_k^2} \neq 0$. De plus, $z_k^n = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} = (-1)^k i$. Ainsi

$$A_n'(x_k) = \frac{2(-1)^k i}{z_k} \frac{1}{1 - \frac{1}{z_k^2}} = \frac{2n(-1)^k i}{z_k - \frac{1}{z_k}} = \frac{(-1)^k n}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{A_n}$ est donc :

$$\frac{1}{A_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \theta_k}{X - 2\cos \theta_k}$$

avec $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Solution 7

---

1. On a $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x - k}$. f_n est continue sur $]0,1[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $]0,1[$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = -\infty$. Donc f_n s'annule une unique fois sur $]0,1[$. Par conséquent, P_n' s'annule une unique fois sur $]0,1[$.

2. Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Puisque $f_n(x_n) = 0$,

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $0 < x_n < 1$, $\frac{1}{x_n} > H_n$. Il est classique de montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. A nouveau,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $x_n < 1$,

$$H_n < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k - 1} = \frac{1}{1 - x_n} + H_{n-1} = \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{n} + H_n$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$

$$\frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{n} + H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} H_n$$

On en déduit que $\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} H_n$. Il est classique de montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$.

Solution 8

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que P' divise P. Il existe donc $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{P}'\mathrm{Q}$. Si P est constant, alors P est nul. Supposons donc $\deg \mathrm{P} = n \geq 1$. Alors $\deg \mathrm{Q} = 1$ et en raisonnant sur les coefficients dominants, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Q} = \frac{1}{n}(\mathrm{X} - a)$. Ainsi $n\mathrm{P} = (\mathrm{X} - a)\mathrm{P}'$. Posons $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{(\mathrm{X}-a)^n}$. Alors $\mathrm{F}' = (\mathrm{X} - a)^n\mathrm{P}' - n(\mathrm{X} - a)^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{X} - a)^{2n} = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{F} = \lambda$ et donc $\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X} - a)^n$. En prenant $\lambda = 0$, on retrouve le polynôme nul.
Réciproquement, on vérifie que tout polynôme de la forme $\lambda(\mathrm{X} - a)^n$ convient.

Solution 9

1. On a $\dfrac{1}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}} = \dfrac{1}{\mathrm{X}} - \dfrac{1}{\mathrm{X} + 1}$. Ainsi
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. On a $\dfrac{1}{4\mathrm{X}^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{X} - 1} - \dfrac{1}{2\mathrm{X} + 1}\right)$. Ainsi
$$v_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

3. On a $\dfrac{1}{\mathrm{X}^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X} - 1} - \dfrac{1}{\mathrm{X} + 1}\right)$. Ainsi
$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{4}$.

4. On a $\dfrac{\mathrm{X} - 2}{\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}} = -\dfrac{2}{\mathrm{X} + 2} + \dfrac{3}{\mathrm{X} + 1} - \dfrac{1}{\mathrm{X}}$. Ainsi
$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=1}^{n} -\frac{2}{k+2} + \frac{3}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

Solution 10

1. La partie polaire relative au pôle 1 est du type $\frac{\lambda}{\mathrm{X}-1}$. On trouve $\lambda = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{32}$.

2. On a
$$\begin{aligned} \mathrm{G}(-1 + h) &= \frac{2 - 2h + h^2}{-2 + h} = -\frac{1 - h + \frac{h^2}{2}}{1 - \frac{h}{2}} \\ &\underset{h\to0}{=} -1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} - \frac{h^4}{16} - \frac{h^5}{32} + o(h^5) \end{aligned}$$

Ainsi

$$G(x) \underset{x\to-1}{=} -1+\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{8}(x+1)^3-\frac{1}{16}(x+1)^4-\frac{1}{32}(x+1)^5+o\left((x+1)^5\right)$$

3. Or on sait que la décomposition en éléments simples de F est du type

$$F(X)=\frac{1}{32(X-1)}+\sum_{k=1}^{6}\frac{\lambda_k}{(X+1)^k}$$

On en déduit que

$$G(x) \underset{x\to-1}{=} \sum_{k=0}^{5}\lambda_{6-k}(x+1)^k$$

Par unicité du développement limité, on trouve :

$$\lambda_1=-\frac{1}{32} \qquad \lambda_2=-\frac{1}{16} \qquad \lambda_3=-\frac{1}{8} \qquad \lambda_4=-\frac{1}{4} \qquad \lambda_5=\frac{1}{2} \qquad \lambda_6=-1$$

La décomposition en éléments simples de F est donc

$$F=\frac{1}{32(X-1)}-\frac{1}{32(X+1)}-\frac{1}{16(X+1)^2}-\frac{1}{8(X+1)^3}-\frac{1}{4(X+1)^4}+\frac{1}{2(X+1)^5}-\frac{1}{(X+1)^6}$$

Solution 11

---

1. Il existe des réels a, b, c, d tels que

$$F=\frac{aX+b}{X^2+1}+\frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

En multipliant par X^2+1 et en évaluant en i, on obtient $ai+b=-1+i$ d'où $a=1$ et $b=-1$.
En multipliant par X^2-X+1 et en évaluant en $-j$, on obtient $-cj+d=2+j$ d'où $c=-1$ et $d=2$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F=\frac{X-1}{X^2+1}-\frac{X-2}{X^2-X+1}$$

2. Il existe des réels λ, μ, a, b, c, d tels que

$$F=\frac{\lambda}{X}+\frac{\mu}{X^2}+\frac{aX+b}{X^2+1}+\frac{cX+d}{(X^2+1)^2}$$

F est paire ce qui fournit par unicité de la décomposition en éléments simples,

$$\lambda=0 \qquad a=0 \qquad c=0$$

En multipliant par X^2 et en évaluant en 0, on obtient $\mu=1$.
En multipliant par $(X^2+1)^2$ et en évaluant en i, on obtient $d=-1$.
Enfin en évaluant évaluant en 1, on obtient $a=-1$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$F=\frac{1}{X^2}-\frac{1}{X^2+1}-\frac{1}{(X^2+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned}F&=\frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)^2}\\&=\frac{1}{X^2(X^2+1)}-\frac{1}{(X^2+1)^2}\\&=\frac{X^2+1-X^2}{X^2(X^2+1)}-\frac{1}{(X^2+1)^2}\\&=\frac{1}{X^2}-\frac{1}{X^2+1}-\frac{1}{(X^2+1)^2}\end{aligned}$$

3. Il existe des réels λ, a, b, c, d tels que

$$\mathrm{F} = \frac{\lambda}{\mathrm{X}} + \frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} + \frac{c\mathrm{X}+d}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}$$

En multipliant par X et en évaluant en 0, on obtient $\lambda = 1$. En multipliant par $(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2$ et en évaluant en j, on obtient $\frac{j^2+1}{j} = cj+d$ d'où $c = 0$ et $d = -1$.
En considérant $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{F}(x)$, on obtient $a = -\lambda = -1$.
Enfin, en évaluant en -1, on obtient $b = -1$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$\mathrm{F} = \frac{1}{\mathrm{X}} - \frac{\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} - \frac{1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}$$

De manière plus astucieuse,

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1-\mathrm{X}}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2} = \frac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)} - \frac{1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1-\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)} - \frac{1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\\ &= \frac{1}{\mathrm{X}} - \frac{\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} - \frac{1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}\end{aligned}$$

4. Il existe des réels λ, a, b, c, d tels que

$$\mathrm{F} = \frac{\lambda}{\mathrm{X}} + \frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3} + \frac{c\mathrm{X}+d}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3)^2}$$

En multipliant par X et en évaluant en 0, on obtient $\lambda = \frac{1}{3}$. En multipliant par $(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3)^2$ et en évaluant une racine α de $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3$, on obtient $2+\frac{3}{\alpha} = c\alpha+d$. Or $\alpha^2+\alpha+3 = 0$ donc $\frac{3}{\alpha} = -\alpha-1$ puis $1-\alpha = c\alpha+d$ donc $c = -1$ et $d = 1$. En considérant $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{F}(x)$, on obtient $a = -\lambda = -\frac{1}{3}$.
Enfin, en évaluant en -1, on trouve $b = -\frac{1}{3}$. Finalement, la décomposition en éléments simples de F est

$$\mathrm{F} = \frac{1}{3\mathrm{X}} - \frac{\mathrm{X}+1}{3(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+3)} - \frac{\mathrm{X}-1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}$$

Solution 12

On pose $\mathrm{Q} = \frac{4\mathrm{X}}{\mathrm{X}^4-1}$. On sait que Q possède les quatre pôles simples $\pm1, \pm i$. Il existe donc des complexes (non-nuls) a, b, c, d tels que

$$\mathrm{Q} = \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{\mathrm{X}+1} + \frac{c}{\mathrm{X}-i} + \frac{d}{\mathrm{X}+i}.$$

(La partie entière est nulle car deg Q est négatif.) En multipliant avec $\mathrm{X}-1$ puis en remplaçant $\mathrm{X} = 1$ on trouve $a = 1$. De manière analogue on procède pour b, c, d. Enfin on trouve

$$\frac{4\mathrm{X}}{\mathrm{X}^4-1} = \frac{1}{\mathrm{X}-1} + \frac{1}{\mathrm{X}+1} - \frac{1}{\mathrm{X}-i} - \frac{1}{\mathrm{X}+i}.$$

En rassemblant les termes conjugés ci-dessus, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Donc

$$\Phi(x) = \ln|x^2-1| - \ln(x^2+1) = \ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}$$

est une primitive de φ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

Solution 13

Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{K}(\mathrm{X})$ telle que $\mathrm{R}' = \frac{1}{\mathrm{X}}$. Quitte à factoriser "maximalement" X au numérateur et au dénominateur on peut écrire R sous la forme

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{X}^m\mathrm{A}}{\mathrm{B}},$$

où $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{A}(0) \neq 0$, $\mathrm{B}(0) \neq 0$. Alors on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{X}} = \left(\frac{\mathrm{X}^m\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)' &= \frac{(m\mathrm{X}^{m-1}\mathrm{A} + \mathrm{X}^m\mathrm{A}')\mathrm{B} - \mathrm{X}^m\mathrm{A}\mathrm{B}'}{\mathrm{B}^2} \\ &= \frac{\mathrm{X}^{m-1}(m\mathrm{A}\mathrm{B} + \mathrm{X}(\mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{B}'))}{\mathrm{B}^2}\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{X}^m(m\mathrm{A}\mathrm{B} + \mathrm{X}(\mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{B}')).$$

- Si $m = 0$, alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{X}(\mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{B}')$, d'où $\mathrm{B}(0)^2 = 0$. Contradiction.
- Si $m > 0$, alors on a aussi $\mathrm{B}(0)^2 = 0$. Contradiction.
- Si $m < 0$, alors la contradiction est que le polynôme B^2 possède un pôle d'ordre $-m$ en 0. En effet, ce pôle ne se “simplifie” pas car pour le numérateur on a
$$(m\mathrm{A}\mathrm{B} + \mathrm{X}(\mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{B}'))(0) = m\mathrm{A}(0)\mathrm{B}(0) \neq 0.$$

Solution 14

Faisons le changement de variable $x = \cos t$. Alors pour les formes différentielles on a $\mathrm{d}x = -\sin t \,\mathrm{d}t$, d'où

$$\int_0^\pi \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{4 - \cos^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}x}{4 - x^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{4 - x^2}$$

Il est aisé de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{4 - \mathrm{X}^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{X} + 2} - \frac{1}{\mathrm{X} - 2}\right)$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{4 - \cos^2 t} = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x + 2} - \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x - 2}\right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

Solution 15

1. La fraction
$$\frac{1}{x^2 + 2}$$
est un élément simple.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Décomposition :
$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1/2}{x + 1} - \frac{1/2}{x - 1}.$$
Intégrale :
$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = \ln(3).$$

3. Pas besoin de décomposer la fraction rationnelle, car $2x + 1$ est la dérivée de $x^2 + x - 3$!
$$\int_2^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} \,\mathrm{d}x = \ln(3).$$

4. On peut évidemment décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

mais il est bien plus simple de faire le changement de variables $x^2=u$. Alors

$$\int_0^2 \frac{x\ \mathrm{d}x}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

5. La décomposition de la fraction

$$\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$$

est

$$1+\frac{565}{(x-4)^4}+\frac{163}{(x-4)^2}+\frac{22}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^3}$$

primitives sont

$$x-\frac{507}{2/(x-4)^2}-\frac{565}{3/(x-4)^3}-163\frac{(x-4)}{+}22\ln|x-4|$$

Enfin,

$$\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\ \mathrm{d}x = \frac{4671}{64}-44\ln(2).$$

6. Décomposition :

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

Primitives :

$$\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right|,$$

d'où

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4).$$

7. Décomposition :

$$\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}.$$

Les primitives sont :

$$x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Intégrale :

$$\mathrm{I} = 6+\frac{7\ln(3)-3\ln(7)}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

8. Décomposition :

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Primitives :

$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan(x),$$

d'où

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\ \mathrm{d}x = \ln(3/2)+2\arctan(1/7).$$

9. La décomposition est

$$\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1+\frac{4/3}{(x-1)^2}+\frac{11/9}{x-1}-\frac{11/9}{x+2}.$$

On trouve alors

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{3}-\frac{22}{9}\ln(2).$$

10. La décomposition de la fraction

$$\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$$

est

$$\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}\ ;$$

les primitives sont

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Enfin

$$\mathrm{I}=\frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2})-\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

11. Décomposition de la fraction rationnelle :

$$\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}=\frac{2x+3}{x^2+1}-\frac{2x+5}{x^2+4}.$$

Primitives :

$$\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right|+3\arctan(x)-\frac{5}{2}\arctan(x/2).$$

Alors

$$\mathrm{I}_a=\ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right|+3\arctan(a)-\frac{5}{2}\arctan(a/2)+2\ln(2).$$

Enfin

$$\lim_{a\to+\infty}\mathrm{I}_a=\frac{\pi}{4}+2\ln(2).$$

12. Pour factoriser le dénominateur, penser à écrire

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2\ ;$$

on trouve alors

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Les primitives s'écrivent

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\right)$$

ce qui donne

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{33+20\sqrt{2}}{17}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi-\arctan(2\sqrt{2}/3)\right).$$

Solution 16

1. Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u=\cos t$ donne

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\left([\ln(2+u)]_{-1}^{1}-[\ln(2-u)]_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}\ln 3\end{aligned}$$

2. Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} &= -\int_0^{\cos x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\cos x} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2 \frac{x}{2}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

car pour $x \in]0, \pi[$, $\tan \frac{x}{2} > 0$.

3. Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{(1-\sin^2 t)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{u-1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ allié à la paramétrisation rationnelle du cercle donne

$$\mathrm{L} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left[\ln(u+\sqrt{2}-1)\right]_0^1 - \left[\ln(1+\sqrt{2}-u\right]_0^1\right) \\
&= \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Solution 17

1. On cherche une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence sous la forme $(an^2+bn+c)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela implique

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a(n+2)^2+b(n+2)+c-an^2-bn-c=n-1$$

Il suffit alors de prendre $a=\frac{1}{4}$ et $b=-1$. On choisira donc $v_n=\frac{1}{4}n^2-n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. On a $\mathcal{A}=(v_n)+\mathrm{F}$ avec F le sous-espace vectoriel des suites (u_n) telles que $u_{n+2}-u_n=0$. Les racines de X^2-1 sont ±1. Une base de F est donc $((1)_{n\in\mathbb{N}},((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Solution 18

Ponsons $\Phi(\mathrm{P})=\mathrm{X}^2\mathrm{P}''-3\mathrm{X}\mathrm{P}'+4\mathrm{P}$ pour $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Si $\mathcal{F}\neq\varnothing$, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker}\Phi$.

Recherche de la solution générale Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul. Notons n le degré de P et a le coefficient dominant de P. Le coefficient du terme de degré n de $\Phi(\mathrm{P})$ est alors $n(n-1)a-3na+4a=a(n^2-4n+4)$. Donc $\mathrm{P}\in\operatorname{Ker}\Phi$ implique $n=2$. Posons $\mathrm{P}=a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$. Alors $\Phi(\mathrm{P})=b\mathrm{X}+4c$. Donc $\mathrm{P}\in\operatorname{Ker}\Phi$ implique $b=c=0$. On en déduit que $\operatorname{Ker}\Phi=\operatorname{vect}(\mathrm{X}^2)$.

Recherche d'une solution particulière On recherche P tel que $\Phi(\mathrm{P})=4-\mathrm{X}$. En reprenant les notations précédentes, on a voit si $n>2$ alors $\deg\Phi(\mathrm{P})=n>2$. On recherche donc P de degré $n\leq2$. Comme $\operatorname{Ker}\Phi=\operatorname{vect}(\mathrm{X}^2)$, on peut rechercher P de degré $n\leq1$. Posons donc $\mathrm{P}=a\mathrm{X}+b$. On a $\Phi(\mathrm{P})=a\mathrm{X}+4b$. Il suffit donc de prendre $a=-1$ et $b=1$.

En conclusion $\mathcal{F}=(-\mathrm{X}+1)+\operatorname{vect}(\mathrm{X}^2)$.

Solution 19

1. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En considérant les coefficients dominants, on voit que $\deg(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}))=\deg\mathrm{P}-1$ si $\deg p\geq1$ et $\deg(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}))=-\infty$ sinon. On va donc chercher P de degré 3 appartenant à E. Posons donc $\mathrm{P}=a\mathrm{X}^3+b\mathrm{X}^2+c\mathrm{X}+d$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. On a alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})=3a\mathrm{X}^2+(2b+3a)\mathrm{X}+a+b+c$. On peut donc prendre $d=0$ et a,b,c vérifiant le système

$$\begin{cases}3a=1\\2b+3a=0\\a+b+c=0\end{cases}$$

On trouve $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{6}$. On peut donc choisir $\mathrm{P}=\frac{1}{3}\mathrm{X}^3-\frac{1}{2}\mathrm{X}^2+\frac{1}{6}\mathrm{X}$.

2. Notons Φ l'endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui à une fonction f associe $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ et $g:x\mapsto x^2$. On a donc $\mathrm{E}=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})\mid\Phi(f)=g\}$. Comme $\Phi(\mathrm{P})=g$, $\mathrm{E}=\mathrm{P}+\operatorname{Ker}\Phi$. Enfin, $\operatorname{Ker}\Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions continues périodiques de période 1.

Solution 20

1. Soient $\mathrm{A}\in\mathcal{F}$ et $b\in\mathcal{G}$. Puisque $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$, il existe $\vec{u}\in\mathrm{F}$ et $\vec{v}\in\mathrm{G}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}+\vec{v}$. Par suite $\mathrm{B}-\vec{v}=\mathrm{A}+\vec{u}\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$.

2. Comme $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$, $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est non vide d'après la première question et c'est un sous-espace affine. De plus, la direction de $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}$. Ainsi $\dim(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})=0$: $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est un singleton.