Exercice 1 ★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^n-1}$
2. $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$
3. $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

Exercice 2 ★★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$.

Exercice 3 ★★

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

1. $F = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
2. $F = \dfrac{4}{(X^2+1)^2}$.
3. $F = \dfrac{1}{X(X-1)^3}$.
4. $F = \dfrac{2X}{X^2+1}$.
5. $F = \dfrac{1}{X^2+X+1}$.
6. $F = \dfrac{X}{(X^2-1)^3}$.

Exercice 4 ★★★

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles et simples. Montrer que le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 5 ★★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est son degré ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines de T_n ?
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{T_n}$.

Exercice 6 ★★★ **Mines-Ponts MP**

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
3. Décomposer $\dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.

Exercice 7 ★★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P_n = \prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. En considérant $f_n = \dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que P_n' admet une unique racine x_n dans $]0,1[$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$.

Exercice 8 ★★

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 9 ★★ **Télescopages**

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$
4. $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k^3+3k^2+2k}$

Exercice 10 ★★

Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)^6}$.

1. Déterminer la partie polaire de F relative au pôle 1.

2. On pose $G = (X+1)^6 F$. Ecrire un développement limité de $G(x)$ à l'ordre 5 en -1.

3. En déduire la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 11 ★★

Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.

1. $F = \dfrac{X+1}{(X^2+1)(X^2-X+1)}$.

2. $F = \dfrac{1}{X^2(X^2+1)^2}$.

3. $F = \dfrac{X^2+1}{X(X^2+X+1)^2}$.

4. $F = \dfrac{2X+3}{X(X^2+X+3)^2}$.

Exercice 12 ★★

Trouver une primitive de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{4x}{x^4-1}.$$

Exercice 13 ★★

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $R \in \mathbb{K}(X)$ telle que $R' = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 14 ★★

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$.

Exercice 15 ★★

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.

2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.

3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,\mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+16}$.

5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,\mathrm{d}x$.

6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,\mathrm{d}x$.

8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$ pour $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une limite quand $a \to +\infty$?

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Exercice 16 ★★ **Règles de Bioche**

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}$ en posant $u=\cos t$;
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ pour $x\in]0,\pi[$ en posant $u=\cos t$;
3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u=\sin t$;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ en posant $u=\tan\frac{t}{2}$.

Exercice 17 ★★

Le but est de déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ de toutes les suites réelles (u_n) vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-u_n=n-1$$

1. Trouver une suite réelle vérifiant cette relation de récurrence.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On précisera la direction de $\mathcal{A}$ et on en donnera une base.

Exercice 18 ★★

Montrer que $\mathcal{F}=\left\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{X}^2\mathrm{P}''-3\mathrm{X}\mathrm{P}'+4\mathrm{P}=4-\mathrm{X}\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et déterminer sa direction.

Exercice 19 ★★

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x+1)-f(x)=x^2$$

1. Déterminer une fonction polynomiale P élément de E.
2. Montrer que E est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et donner sa direction.

Exercice 20 ★★

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction respectives F et G.

1. Montrer que si $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$, alors $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\varnothing$.
2. Montrer que si $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, alors $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est un singleton.