MATRICES

Calculs élémentaires

Exercice 1 **Entrez dans la danse**

Calculez

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2+2i \\ 4 & 1 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2-i \\ 2 & -i \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 **Cayley-Hamilton en dimension 2**

Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Etablir que

$$\mathrm{M}^2 - (a+d)\mathrm{M} + (ad-bc)\mathrm{I}_2 = 0_2.$$

Exercice 3 **A hue et à dia**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U} = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(\mathrm{A})$ la somme des coefficients de A. Exprimer UAU en fonction de $\sigma(\mathrm{A})$ et de U.

Exercice 4

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2.$$

Montrer que AB = BA.

Exercice 5

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices A et B définies par $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et

$$a_{i,j} = i+j, \quad b_{i,j} = i-j.$$

Calculer le terme général des matrices C = A − B et D = AB.

Exercice 6

Montrer que l'ensemble G des matrices $\mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7 ★★ **Matrices stochastiques**

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Puissances

Exercice 8 ★ **Puissances**

Calculer les puissances des matrices A, B, C et D suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 ★ **Suites récurrentes couplées**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites de nombres réels définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer les expressions des termes généraux de (u_n), (v_n) et (w_n) en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 10 **Avec polynôme annulateur**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - A^2 - 4A + 4I_p = 0_p.$$

Etablir que, pour tout entier naturel n, A^n appartient à $\operatorname{vect}(I_p, A, A^2)$ et exprimer A^n en fonction de I_p, A et A^2.

Exercice 11 **Petits calculs**

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, B^2 et B^3. En déduire A^n et B^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Calculer AB, AB^2, BA et B^2A.

Exercice 12 ★ **Un calcul de puissances**

Soient a et b, deux nombres complexes. Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 **Mines-Ponts MP**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner sa dimension ainsi qu'une base.

   b. Montrer que E est un anneau. Est-il commutatif ?

   c. On note G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que G est un groupe.
2. Soit $A \in E$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. On pourra distinguer les cas $a \neq b$ et $a = b$.
3. On pose $B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!}$. Montrer que la suite (B_n) et préciser sa limite B. (On dit qu'une suite de matrices converge si les suites des coefficients convergent ; dans ce cas, la limite est la matrice constituée des limites des coefficients).
4. On note f l'application de E dans E qui à la matrice A associe la matrice B définie dans la question précédente. f est-elle linéaire ? injective ? surjective ? Préciser son image.

Exercice 15 **Navale**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer de deux façons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Inverses

Exercice 16 ★★ **Matrices à diagonale dominante**

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 17 ★ **Matrices unipotentes**

Soit $\mathfrak{U}_n$ le sous-ensemble de $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ constitué des matrices dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Prouver que $\mathfrak{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19

Soit A_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A_n est inversible si et seulement si n est pair et calculer son inverse dans ce cas.

Exercice 20

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

Exercice 21 ★

Dire si les matrices suivantes sont inversibles ou non. Le cas échéant, calculer leur inverse ou sinon, donner une base de leur image et une base de leur noyau.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8. $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 ★ **Taille XXL**

Soit $n \geqslant 1$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes,

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 ★ **Le point de vue élémentaire**

Soient $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible. On pose alors $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

1. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.
2. Prouver que $I_n + B$ est inversible.

Exercice 24 ★★ **Utilisation d'identités remarquables**

Soient $n \geqslant 1$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver l'inversibilité et inverser M par la méthode du pivot de Gauss.
2. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Calculer les puissances de J.

   b. Exprimer M en fonction de J.

   c. En déduire que M est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

Exercice 25 **Pivot party**

En utilisant l'algorithme du pivot, vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 26

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Image et noyau

Exercice 27

Les applications suivantes sont clairement linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice M correspondante rapportée aux bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$;
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$;
4. $\theta : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X],\ P \mapsto P'$.

Exercice 28 **Une matrice de projection**

Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

considérée comme matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 29

Déterminer des bases du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Donner aussi des systèmes d'équations cartésiennes (avec un nombre minimum d'équations) de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 30 **Sans calculs**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer *sans calculs* des bases de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Rang

Exercice 31 ★ **Avec paramètre**

Discuter le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 **Matrices de rang 1**

Soit M une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$ à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = UV^\top$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et de $\operatorname{tr}(M)$.
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 33

Soit A une matrice réelle. Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top A = \operatorname{rg} AA^\top$.

Exercice 34

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, non constamment égale à 0 ou 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.
2. Soit A une matrice de rang r, strictement inférieur à n.
   a. Montrer l'existence de $r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.
   b. En déduire que $f(A) = 0$.
3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
   Donner un exemple d'une telle application.

Exercice 35

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel que $AU = \lambda U$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $A^\top V = \lambda V$.

Exercice 36

Montrer qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si il existe deux familles libres $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$ et $(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_r)$ de vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1^\top + \cdots + \mathrm{X}_r\mathrm{Y}_r^\top$.

Changement de base

Exercice 37

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
2. Déterminer une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 38 **Passage obligé**

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ et $\mathcal{B} = (u, v)$.

1. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Donner les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et la base canonique $\mathcal{B}_0$ de E.

Exercice 39 **Changements de base**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y, y - z, -z + 2x).$$

1. Calculer la matrice M de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que la famille $\mathcal{B}'$ définie par

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$

   est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice $\mathrm{P} = \mathrm{mat}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ et son inverse.
4. Calculer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
5. Quel est le lien entre M, M' et P ?

Exercice 40

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique vaut

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
2. Soit la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f_1 = (1, 0, 0, 0), \quad f_2 = (1, 1, -1, 1), \quad f_3 = (3, 2, 0, -1)$$

   et $f_4 = (7, 4, -4, 5)$. Vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Représentation des applications linéaires

Exercice 41

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $A = a + bX + cX^2$ un élément de E. On définit l'application f par :

$$\forall P \in E,\ f(P) = (AP)''$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer une condition sur A pour que f soit bijective.
4. On pose $A = X^2 + 1$. Déterminer M^{-1} et M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans ce cas.

Exercice 42

Soit $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Montrer que P est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 43

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X + \operatorname{tr}(AX)B \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3. Déterminer la base et la direction de f dans ce cas.

Exercice 44

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ si et seulement si n est pair et il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline 0_p & 0_p \end{array}\right)$ avec $n = 2p$.

Exercice 45 ★ — Polynom's Corner

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et T_n l'application définie sur E_n par

$$T_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'.$$

1. Prouver que $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
2. Ecrire la matrice $M_n = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n}(T_n)$ de T_n dans la base canonique de E_n.
3. Dans le cas où $n = 3$, déterminer des bases de $\operatorname{Ker}(T_n)$ et de $\operatorname{Im}(T_n)$.

Exercice 46 ★ — Le commutant d'une matrice

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et φ_A l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_A : M \longmapsto AM - MA.$$

1. Prouver que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ_A.
3. En déduire que le commutant de A, ie l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Exercice 47 **Espaces de polynômes**

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f l'application défine sur l'espace E par $f(P) = P + P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.

2. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. Déterminer la matrice $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.

3. Etablir que f est un automorphisme de E et calculer M^{-1}.

4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.

Exercice 48 **Du p'tit lait**

Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, admettant pour matrice relative à la base canonique la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f^2.

3. Vérifier que $\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Im}(f^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 49

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par :

$$f(P(X)) = XP(X), \quad g(P(X)) = P'(X) \quad \text{et} \quad h(P(X)) = (P(X))^2.$$

1. Montrer que les applications f et g sont linéaires, mais que h ne l'est pas.

2. Les applications f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de f.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par f_n et g_n les restrictions de f et de g à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'image de g_n est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ et celle de f_n est incluse dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

4. Déterminer la matrice de g_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f_n relativement aux bases

$$\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{n+1} = (1, X, \dots, X^{n+1}).$$

5. Calculer les dimensions respectives des images de f_n et de g_n.

Exercice 50 **Etude d'un endomorphisme**

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

3. Déterminer le noyau et l'image de f pour $n \geqslant 3$. Calculer leurs dimensions respectives.

4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

Exercice 51

Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z\,,\ y + z\,,\ x + y - 2z).$$

1. Ecrire la matrice associée à L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base et déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :
$$\mathrm{Ker}(L),\quad \mathrm{Im}(L),\quad \mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Im}(L).$$
3. Déterminer $L \circ L = L^2$ et $L \circ L \circ L = L^3$ en calculant leurs matrices dans la base canonique. Quelle est la matrice de L^{16} dans la base canonique ?

Exercice 52 ★ **Un endomorphisme de matrices**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = AM$.

1. Vérifier que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme. Donner une expression simple de l'isomorphisme réciproque.
3. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 53

On considère l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) + P(X) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$. On notera M cette matrice.
3. **a.** Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

   b. En déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire que l'équation $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$, et donner cette solution.

Exercice 54

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1(x) = xe^x,\ g_2(x) = xe^{-x},\ g_3(x) = e^x,\ g_4(x) = e^{-x} \ .$$

On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

1. **a.** Si a, b, c et d sont quatre réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ axe^x + bxe^{-x} + ce^x + de^{-x} = 0$, montrer qu'alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (ax + c)e^x = 0$, puis que $a = c = 0$.

   b. Montrer que (g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de F, qu'on notera $\mathcal{B}_1$ par la suite. Quelle est la dimension de F ?

2. **a.** Vérifier que g_1' et g_2' appartiennent à F.

   b. Montrer que (g_1, g_2, g_1', g_2') est aussi une base de F, qu'on notera $\mathcal{B}_2$. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

3. Soit φ l'application définie sur F par $\varphi(f) = f'$.

   a. Montrer que φ est un endomorphisme de F.

   b. Déterminer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}_1$.

   c. En déduire que φ est un automorphisme de F.

   d. Déterminer la matrice N de φ dans la base $\mathcal{B}_2$. Cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 55 ★★★ **Centrale MP**

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.
2. Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
3. Montrer que $\dim \mathrm{H}_1 \leq (n - \mathrm{rg}\ p_2)^2$ et $\dim \mathrm{H}_2 \leq (n - \mathrm{rg}\ p_1)^2$.
4. Quel est le nombre de choix possibles pour le couple $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$?

Exercice 56 ★★

Soient $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\ p_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}\ p_n = \mathrm{E}$.

Exercice 57 ★★★

Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

Exercice 58 ★

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz + (1-i)\overline{z} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Montrer qu'il existe une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Construire le point d'affixe $f(z)$ à partir du point d'affixe z.

Exercice 59 ★

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
2. On note D l'opérateur de dérivation. Montrer que F est stable par D. On notera d l'endomorphisme de F induit par D.
3. On note M la matrice de d dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que d est un automorphisme de F. Écrire la matrice de d^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5. On note $f = d - \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de f.
6. On note $g = d + \mathrm{Id}$. Déterminer l'image et le noyau de $g \circ f$.

Matrices remarquables

Exercice 60 ★ Matrices (anti-)symétriques

Soient $n \geqslant 1$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

1. Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser leurs dimensions.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 61 ★

Soit E le sous ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim(E).
2. Soit $\mathrm{M}(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang.
3. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $\mathrm{M}(a,b,c)^{-1}$ de $\mathrm{M}(a,b,c)$.
4. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 62

Montrer que

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid tr(\mathrm{M}) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 63

On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est magique si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques et, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, $s(\mathrm{M})$ la valeur commune des sommes.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.

   Remarque. Il s'agit de montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que s est un morphisme d'anneau et une forme linéaire.

2. Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ est inversible, alors $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{M}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_s$ des matrices magiques symétriques et du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_a$ des matrices magiques antisymétriques.
4. On note ϕ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M et on pose

   $$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x_1 + \cdots + x_n = 0\} \text{ et } \mathcal{K} = \{(x, \dots, x), x \in \mathbb{K}\}.$$

   Montrer que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ si et seulement si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par ϕ_M.
5. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

Exercice 64

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\Delta_\mathrm{A} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{M} + \mathrm{M}^\top = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{A}\}$. On note respctivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ les ensembles des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \neq 2$, montrer que $\Delta_\mathrm{A} = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
3. Déterminer Δ_A dans le cas où $\mathrm{A} \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.
4. Déterminer Δ_A dans le cas où $tr(\mathrm{A}) = 2$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. On pourra remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la somme directe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 65 **Questions en vrac**

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\mathrm{M}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E} = \{\mathrm{M}(z),\ z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que l'application $\mathrm{M} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ z & \longmapsto & \mathrm{M}(z) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est un anneau commutatif et que M est un isomorphisme d'anneaux.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un corps.
5. Résoudre l'équation $\mathrm{A}^4 = \mathrm{I}_2$ d'inconnue $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$.
6. Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\mathrm{N}(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F} = \left\{\mathrm{N}(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 66 **Matrices de trace nulle et crochets de Lie**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{N}_n = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0\}$.
Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on pose $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On note $\mathcal{L}_n = \left\{[\mathrm{A}, \mathrm{B}], (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\right\}$.

1. **a.** Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.
   b. Montrer que $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{N}_n$.
2. **a.** Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle appartient à $\mathcal{N}_n$.
   b. Montrer que toute matrice de $\mathcal{N}_n$ est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de diagonale nulle.
   c. En déduire que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{L}_n$.

Exercice 67 **Matrices symplectiques**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline -\mathrm{I}_n & 0 \end{array}\right)$. On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est *symplectique* si $\mathrm{M}^\mathsf{T}\mathrm{JM} = \mathrm{J}$. Montrer que l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice 68

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{BA})$ pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Equations d'inconnue matricielle

Exercice 69

Soient A et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(\mathrm{AX}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BX}).$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 70

On considère l'équation

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{A} \tag{E}$$

d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de Im A et Ker A.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Soit X vérifiant (E). Montrer que X ou $\mathrm{X} + \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.
4. On suppose X non inversible.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{X}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{X} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$.
   b. Montrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} = \mathrm{Im}\,\mathrm{X}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{X}$.
   c. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\mathrm{X} = x\mathrm{A}$. Quelles sont les seules valeurs possibles de x ? Quelles sont les matrices X correspondantes ?
5. On suppose $\mathrm{X} + \mathrm{I}_2$ non inversible. En posant $\mathrm{Y} = -(\mathrm{X} + \mathrm{I}_2)$, se ramener au cas précédent.
6. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 71

On veut résoudre le système d'équations d'inconnues dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{cases} XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

1. On suppose que le système admet un couple de solutions (X, Y). Montrer que $\operatorname{rg} X = \operatorname{rg} Y = 1$.
2. Que peut-on en déduire sur la forme de X et Y ?
3. Résoudre le système.

Exercice 72

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Systèmes linéaires

Exercice 73

Résoudre selon les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice 74 ★

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = -4 \\ 3x + 2y - 3z = 17 \\ 5x - 3y + 8z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 6y - 11z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = -10. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5. \end{cases}$$

Exercice 75 ★★

Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.