Nombres réels, relations binaires

Partie entière

Solution 1

Posons $n = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Alors $n \leq \sqrt{x} < n+1$. Donc $n^2 \leq x < (n+1)^2$. D'une part, n^2 est entier et $n^2 \leq x$ donc $n^2 \leq \lfloor x\rfloor$. D'autre part, $\lfloor x\rfloor \leq x < (n+1)^2$. Finalement $n^2 \leq \lfloor x\rfloor < (n+1)^2$ puis, par stricte croissance de la racine carrée, $n \leq \sqrt{\lfloor x\rfloor} < n+1$. Comme n est un entier, ceci signifie que $\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = n = \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor$.

Solution 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par concavité de la fonction racine carrée,

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) \leq \sqrt{\frac{1}{2}\left(n+(n+1)\right)}$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$$

Par croissance de la partie entière

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor \leq \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Posons alors $p = \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$. Alors

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < p+1$$

Les deux termes étant positifs, on obtient par passage au carré

$$2n+1+2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2$$

ou encore

$$2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2-(2n+1)$$

A nouveau par passage au carré

$$4n^2+4n < \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

Les deux membres étant entiers, on peut alors affirmer que

$$4n^2+4n+1 \leq \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2 \leq \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

On remarque alors que $2n+1$ et $(p+1)^2-(2n+1)$ sont positifs (en effet, $(p+1)^2-(2n+1) > 2\sqrt{n^2+n} \geq 0$) donc

$$2n+1 \leq (p+1)^2-(2n+1)$$

ou encore

$$4n+2 \leq (p+1)^2$$

Or un carré d'entier ne peut être congru à 2 modulo 4 donc

$$4n+2 < (p+1)^2$$

puis

$$\sqrt{4n+2} < p+1$$

Puisque $p+1$ est entier,

$$\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor \leq p = \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$$

Or on a vu précédemment que

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor \leq \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Finalement,

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Solution 3

Posons, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor.$$

▶ La fonction f est $1/n$-périodique car, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x+1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor n(x+1/n) \rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx+1 \rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x+1 \rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

⋄ Soit alors $x \in [0, 1/n[$. On a $\lfloor nx \rfloor = 0$ et

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$$

d'où

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0,$$

et finalement $f(x) = 0$.

▶ La fonction f est $1/n$-périodique et nulle sur $[0, 1/n[$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 4

1. Soit $n \geqslant 1$. L'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

est équivalente à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

i.e.

$$2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}.$$

Comme

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

cette dernière inégalité est vraie, d'où l'inégalité initiale.

2. D'après le **1.**, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 9999$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En additionnant ces 9999 inégalités, on aboutit après telescopage à :

$$\alpha - 1 < 2(\sqrt{1000} - \sqrt{1}) < \alpha - \frac{1}{100},$$

d'où

$$198 + \frac{1}{100} < \alpha < 199$$

ainsi

$$\lfloor \alpha \rfloor = 198.$$

Solution 5

Posons, pour tout réel x,

$$f(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

▶ La fonction f est 1-périodique car, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▶ Soit alors $x \in [0,1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$ et $nx \in [0,n[$ d'où $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0,1[$ et donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$$

et finalement $f(x) = 0$.

▶ La fonction f est 1-périodique et nulle sur $[0,1[$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 6

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que g est nulle sur $[0,1[$. Soit alors $0 \leqslant x < 1$. On a

$$\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2} \in [0,1[,$$

d'où $g(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

Solution 7

1. On a clairement
$$\{54,465\} = 0,465 \quad \text{et} \quad \{-36,456\} = 0,544.$$

2. Si $x \in \mathbb{Z}$,
$$\{-x\} = \{x\}.$$
Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc
$$\{-x\} = 1 - \{x\}.$$

3. on a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\{x+1\} = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}.$$
D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire …

Solution 8

Puisque
$$x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leqslant x+y,$$
$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
et
$$y-1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y,$$
on a
$$-1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2,$$
ainsi
$$\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}.$$
Les deux valeurs sont bien prises par l'expression car, par exemple,
$$\lfloor 0+0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor - \lfloor 0 \rfloor = 0$$
et
$$\lfloor 1.5+1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor - \lfloor 1.5 \rfloor = 1.$$

Solution 9

1. On a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ si et seulement si
$$m \leqslant \sqrt{k} < m+1,$$
c'est-à-dire
$$m^2 \leqslant k < (m+1)^2.$$

2. On a
$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} m \\ &= \sum_{m=1}^{n} m(2m+1) = 2\sum_{m=1}^{n} m^2 - \sum_{m=1}^{n} m \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \end{aligned}$$

Solution 10

1. Soit x tel que $\lfloor 2x-1\rfloor = \lfloor x+1\rfloor$. On a alors,

$$2x-2 < \lfloor 2x-1\rfloor = \lfloor x+1\rfloor \leqslant x+1$$

et donc $2x-2 < x+1$, ie $x < 3$. De même,

$$x < \lfloor x+1\rfloor = \lfloor 2x-1\rfloor \leqslant 2x-1$$

et donc $x < 2x-1$, ie $1 < x$. Ainsi, toute solution de l'équation appartient à $]1,3[$.

Réciproquement …

- Si $1 < x < \frac{3}{2}$, on a $\lfloor 2x-1\rfloor = 1$ et $\lfloor x+1\rfloor = 2$, x n'est donc pas solution.
- Si $\frac{3}{2} \leqslant x < 2$, on a $\lfloor 2x-1\rfloor = 2$ et $\lfloor x+1\rfloor = 2$, x est donc solution.
- Si $2 \leqslant x < \frac{5}{2}$, on a $\lfloor 2x-1\rfloor = 3$ et $\lfloor x+1\rfloor = 3$, x est donc solution.
- Si $\frac{5}{2} \leqslant x < 3$, on a $\lfloor 2x-1\rfloor = 4$ et $\lfloor x+1\rfloor = 4$, x n'est donc pas solution.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[.$$

2. Soit x tel que $\lfloor x+3\rfloor = \lfloor x-1\rfloor$. On a alors,

$$x+2 < \lfloor x+3\rfloor = \lfloor x-1\rfloor \leqslant x-1$$

et donc $x+2 < x-1$, ie $2 < -1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc aucune solution.

Solution 11

On a $\forall x \geqslant 3/2$,

$$\lfloor |3/2-x| \rfloor = \lfloor x-3/2\rfloor = -1 + \lfloor x-1/2\rfloor.$$

De même, $\forall x \leqslant 3/2$,

$$\lfloor |3/2-x| \rfloor = \lfloor -x+3/2\rfloor = 1 + \lfloor -x+1/2\rfloor.$$

D'où l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$

Solution 12

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor.$$

Comme

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x+1) = f(x),$$

il suffit d'établir l'inégalité sur $[0,1[$. Or, sur cet intervalle,

$$\lfloor x\rfloor = 0$$

d'où

$$f(x) = \lfloor nx\rfloor \geqslant 0.$$

De plus, comme $nx < n$, on a

$$f(x) = \lfloor nx\rfloor \leqslant n-1.$$

Bornes supérieures et inférieures

Solution 13

1. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. En effet, $f(0) \in [0,1]$ donc $f(0) \geq 0$. A est clairement majorée par 1.
2. $0 \in A$ donc $0 \leq c$. De plus, 1 est un majorant de A. Comme c est le plus petit majorant de A, $c \leq 1$. Par conséquent, $c \in [0,1]$.
3. Soit $x \in A$. On a $x \leq c$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(c)$. Comme $x \in A$, $x \leq f(x) \leq f(c)$. Ceci étant valable pour tout $x \in A$, on obtient après passage à la borne supérieure $c \leq f(c)$.
4. On a montré à la question précédente que $c \leq f(c)$. Par croissance de f, on a donc $f(c) \leq f(f(c))$. Donc $f(c) \in A$. Comme $c = \sup A$, on en déduit que $f(c) \leq c$. Finalement $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Solution 14

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. On a donc $n \geq 10^{k-1}$ i.e. $k \leq \log_{10} n + 1$ et $s_n \leq 9k$ puisque tout chiffre est inférieur ou égal à 9. Finalement, on obtient bien $s_n \leq 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p le nombre de chiffres 9 par lequel se termine l'écriture décimale de n. Lorsque l'on ajoute 1 à n, on transforme les p derniers chiffres 9 en des 0 et on ajoute 1 au chiffre précédent les p derniers chiffres 9. Ainsi $s_{n+1} = s_n - 9p + 1 \leq s_n + 1$. On a donc $\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq 1 + \frac{1}{s_n} \leq 2$ puisque $s_n \geq 1$. Bien évidemment, on a également $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq 0$. Ainsi $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bien bornée.
   Puisque $\frac{s_2}{s_1} = 2$, la borne supérieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est 2 et elle est atteinte (c'est donc un maximum). De plus $\frac{s_{10^k}}{s_{10^k-1}} = \frac{1}{9k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc 0 est la borne inférieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cette borne n'est pas atteinte puisque $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 15

Posons $g(x) = \inf_{y\in B} f(x,y)$ pour tout $x \in A$ et $h(y) = \sup_{x\in A} f(x,y)$ pour tout $y \in B$.
Soit $(x,y) \in A \times B$. Alors $g(x) \leq f(x,y) \leq h(y)$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $x \in A$, $h(y)$ est un majorant de g sur A. Ainsi $\sup_{x\in A} g(x) \leq h(y)$. Cette dernière inégalité est vraie quelque soit le choix de $y \in B$ donc $\sup_{x\in A} g(x)$ est un minorant de h sur B. Ainsi $\sup_{x\in A} g(x) \leq \inf_{y\in B} g(y)$. Cette dernière inégalité est celle demandée par l'énoncé.

Solution 16

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \inf f([x,+\infty[)$ et $h(x) = \sup f([x,+\infty[)$.
Soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \leq x_2$.
Puisque $x_1 \leq x_2$, $[x_2,+\infty[\subset [x_1,+\infty[$ puis $f([x_2,+\infty[) \subset f([x_1,+\infty[)$. Il s'ensuit que $\inf f([x_1,+\infty[) \leq f([x_2,+\infty[)$ i.e. $g(x_1) \leq g(x_2)$ et $\sup f([x_2,+\infty[) \leq \sup f([x_1,+\infty[)$ i.e. $h(x_2) \leq h(x_1)$.
Ainsi g est croissante et h est décroissante.

Solution 17

1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et que $1 = 2 - \frac{1}{1} \in \mathcal{A}$, $1 = \min \mathcal{A}$. A fortiori, $1 = \inf \mathcal{A}$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et la suite $\left(2 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant vers 2 donc $2 = \sup \mathcal{A}$.
2. Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $-1 \leq 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq 3$, $-1 = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in \mathcal{B}$ et $3 = 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} \in \mathcal{B}$ donc $-1 = \min \mathcal{B}$ et $3 = \max \mathcal{B}$. A fortiori, $-1 = \inf \mathcal{B}$ et $3 = \sup \mathcal{B}$.
3. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \neq n$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$, $0 = 1 - \frac{1}{1-0} \in \mathcal{C}$ et $2 = 1 - \frac{1}{0-1} \in \mathcal{C}$ donc $0 = \min \mathcal{C}$ et $2 = \min \mathcal{C}$. A fortiori, $0 = \inf \mathcal{C}$ et $2 = \sup \mathcal{C}$.

4. Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(p-q)^2 \geq 0$ donc $p^2+q^2 \geq 2pq$ puis $\frac{pq}{p^2+q^2} \leq \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{1}{2} = \frac{1\times 1}{1^2+1^2} \in \mathcal{D}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{D}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{D}$.
Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{pq}{p^2+q^2} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{D}$.

5. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{1}{2^m+3^m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{E}$.
Posons $u_{m,n} = \frac{2^n}{2^m+3^{n+m}}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} u_{m,n+1} - u_{m,n} = \frac{2^{n+1}}{2^m+3^{m+n+1}} - \frac{2^n}{2^m+3^{m+n}} &= \frac{2^{m+n+1} + 2\cdot 3^m 6^n - 2^{m+n} - 3\cdot 3^m 6^n}{(2^m+3^{m+n})(2^m+3^{m+n+1})} \\ &= \frac{2^{m+n} - 3^m 6^n}{(2^m+3^{m+n})(2^m+3^{m+n+1})} \leq 0 \end{aligned}$$

car $6 \geq 2$ et $3 \geq 2$. La suite $(u_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{m,n} \leq u_{m,0} = \frac{1}{2^m+3^m} \leq \frac{1}{2}$ puis que $\frac{1}{2}$ est un majorant de $\mathcal{E}$. De plus, $\frac{1}{2} = \frac{2^0}{2^0+3^{0+0}} \in \mathcal{E}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{E}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{E}$.

6. Pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{q+1}$$

de sorte que

$$0 \leq \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \leq 3$$

La suite $\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{C}$.
La suite $\left(2 + \frac{q-1}{q+1}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant vers 3 donc $3 = \sup \mathcal{C}$.

7. Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)$, $m^2+mn+n^2 = (m-n)^2+3mn \geq 3mn$ donc $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \leq \frac{1}{3}$. De plus, $\frac{1}{3} = \frac{1\times 1}{1^2+1\times 1+1^2} \in \mathcal{G}$ donc $\frac{1}{3} = \max \mathcal{G}$. A fortiori, $\frac{1}{3} = \sup \mathcal{G}$.
Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)$, $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{n}{n^2+n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{G}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{G}$.

Solution 18

Soit $x \in A \cup B$. Alors, puisque $x \in A$ ou $x \in B$,

$$x \leqslant \max\left[\sup(A), \sup(B)\right],$$

$A \cup B$ est donc majoré et $\sup(A \cup B)$ étant le plus petit majorant de $A \cup B$,

$$\sup(A \cup B) \leqslant \max\left[\sup(A), \sup(B)\right].$$

De plus,puisque A et B sont inclus dans $A \cup B$,

$$\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup(B) \leqslant \sup(A \cup B),$$

et ainsi

$$\sup(A \cup B) \geqslant \max\left[\sup(A), \sup(B)\right],$$

et finalement

$$\sup(A \cup B) = \max\left[\sup(A), \sup(B)\right].$$

On prouve sans peine selon le même schéma la formule

$$\inf(A \cup B) = \min\left[\inf(A), \inf(B)\right].$$

Solution 19

L'ensemble,que nous noterons A, est non vide et borné car $\forall n \geqslant 1$,

$$-1 \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant 1.$$

A admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque $\forall n \geqslant 3$,

$$-1 < \frac{(-1)^n}{n} < \frac{1}{2},$$

et $1/2, -1 \in \mathrm{A}$, $\sup(\mathrm{A}) = 1/2$ et il s'agit d'un plus grand élément. De même $\inf(\mathrm{A}) = -1$ qui est aussi un plus petit élément.

Solution 20

Si A et B sont bornées non vides, on a pour tous $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{B}$,

$$\inf \mathrm{A} \leqslant a \leqslant \sup \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \inf \mathrm{B} \leqslant b \leqslant \sup \mathrm{B},$$

d'où en sommant

$$\forall a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B} \ : \quad \inf \mathrm{A} + \inf \mathrm{B} \leqslant a + b \leqslant \sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B}.$$

Cela montre que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est bornée et possède donc une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, ça exhibe $\inf \mathrm{A} + \inf \mathrm{B}$ en tant que minorant de $\mathrm{A} + \mathrm{B}$. Or $\inf(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ est le minorant le plus grand de $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, d'où

$$\inf \mathrm{A} + \inf \mathrm{B} \leqslant \inf(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Et de même

$$\sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B} \geqslant \sup(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Il nous reste à voir que ces deux inégalités sont des égalités ; les deux cas étant analogues, nous traiterons uniquement le cas de la borne supérieure. Supposons donc par l'absurde que l'on ait

$$\sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B} > \sup(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Notons

$$\epsilon := \sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B} - \sup(\mathrm{A} + \mathrm{B}) > 0.$$

Par définition d'une borne supérieure, il existe $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{B}$ tels que

$$\sup \mathrm{A} - \frac{\epsilon}{2} < a \leqslant \sup \mathrm{A}$$

et

$$\sup \mathrm{B} - \frac{\epsilon}{2} < b \leqslant \sup \mathrm{B}.$$

Par addition des parties gauches de ces encadrements

$$\sup \mathrm{A} + \sup \mathrm{B} - \epsilon < a + b.$$

Par définition de ϵ, cela équivaut à la contradiction

$$\sup(\mathrm{A} + \mathrm{B}) < a + b.$$

Solution 21

1. On a clairement dans le premier cas

$$d(1, \mathrm{A}) = 0,$$

dans le deuxième

$$d(2, \mathrm{A}) = 1,$$

et dans le troisième

$$d(1/2, \mathrm{A}) = 0.$$

2. L'ensemble

$$\Omega = \left\{ |x-a| \mid a \in \mathrm{A} \right\}$$

est une partie non vide (puisque A est non vide) de $\mathbb{R}$, Ω est de plus minorée par 0, Ω admet donc une borne inférieure.

3. La borne inférieure $d(x, \mathrm{A})$ n'est pas nécessairement un plus petit élément :

- si $\mathrm{A} =]0,1]$ et $x = 0$, on a $\Omega =]0,1]$ et $d(x,\mathrm{A}) = 0$ et $0 \notin \mathrm{A}$, la borne inférieure n'est donc pas un plus petit élément.
- si $\mathrm{A} = [0,1]$ et $x = 0$, on a $\Omega = [0,1]$ et $d(x,\mathrm{A}) = 0$ et $0 \in \mathrm{A}$, la borne inférieure est donc un plus petit élément.

4. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{Q} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \varnothing,$$

ainsi $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|x-r| < \varepsilon$$

et donc $d(x,\mathbb{Q}) \leqslant \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure de Ω, $d(x,\mathbb{Q}) \leqslant \varepsilon$. Puisque $d(x,\mathbb{Q}) \geqslant 0$ et

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ d(x,\mathbb{Q}) \leqslant \varepsilon$$

on peut conclure que $d(x,\mathbb{Q}) = 0$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on adapte sans peine ce qui précède pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \ d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$|x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|,$$

or $\forall a \in \mathrm{A}$,

$$d(x,\mathrm{A}) \leqslant |x-a|,$$

ainsi $\forall a \in \mathrm{A}$

$$d(x,\mathrm{A}) - |x-y| \leqslant |y-a|.$$

Le nombre $d(x,\mathrm{A}) - |x-y|$ est donc un minorant de l'ensemble

$$\left\{ |y-a| \ , \ a \in \mathrm{A} \right\},$$

d'où

$$d(x,\mathrm{A}) - |x-y| \leqslant d(y,\mathrm{A})$$

soit

$$d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \leqslant |x-y|,$$

et puisque x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi

$$d(y,\mathrm{A}) - d(x,\mathrm{A}) \leqslant |x-y|,$$

ainsi

$$\left| d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \right| \leqslant |x-y|.$$

Densité

Solution 22

Soit r un rationnel. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. Posons $u_n = \sqrt{q^2n^2 + 2pn} - \sqrt{q^2n^2}$ pour n suffisamment grand. La suite (u_n) est une suite d'éléments de A et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = qn\left(\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2n}} - 1\right)$$

Comme $\sqrt{1 + \frac{2p}{q^2n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{q^2n}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{p}{q} = r$.
On en déduit que $\mathbb{Q} \subset \bar{\mathrm{A}}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{\bar{\mathrm{A}}} = \bar{\mathrm{A}}$. Ainsi A est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution 23

---

1. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
2. Récurrence évidente.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$ de sorte que f est impaire. On en déduit le résultat demandé via la question précédente.
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ i.e. $p = qr$. Alors $f(p) = ap$ d'après la question précédente. Par ailleurs, $f(p) = f(qr) = qf(r)$ (via une récurrence éventuelle). On en déduit que $qf(r) = ap$ i.e. $f(r) = ar$.
5. **a.** Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des rationnels α_n et β_n tels que

   $$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x < \beta_n < x + \frac{1}{n}$$

   On en déduit le résultat demandé.

   b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit deux suites de rationnels (α_n) et (β_n) comme dans la question précédente. Puisque $\alpha_n < x < \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par croissance de f, $f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ou encore $a\alpha_n \leq f(x) \leq a\beta_n$ en utilisant une question précédente. On obtient alors $f(x) = ax$ par passage à la limite.
6. Si f est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   alors en posant $a = f(1)$, les questions précédentes montrent que $f = a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. De plus, $a = f(1) \geq f(0)$.
   Réciproquement, si $f = a\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, f est bien une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   Finalement les applications vérifiant les conditions demandées sont les applications $f = a\,\mathrm{Id}_d\,\mathrm{R}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Solution 24

---

1. Faux. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
2. Faux. $]0,1[\cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
3. Vrai. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $]a,b[\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Mais $]a,b[\cap \mathcal{A} \subset]a,b[\cap \mathcal{B}$ donc $]a,b[\cap \mathcal{B} \neq \varnothing$.
4. Faux. Supposons qu'il existe une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ bornée et dense dans $\mathbb{R}$. Notons M un majorant de $\mathcal{A}$ (il en existe un car $\mathcal{A}$ est majorée). Alors $]\mathrm{M}, \mathrm{M}+1[\cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Il existe donc $x \in \mathcal{A}$ tel que $x > \mathrm{M}$, ce qui contredit le fait que M est un majorant de $\mathcal{A}$.

Solution 25

Soient $x < y$. On a donc, par stricte croissance sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y},$$

d'où

$$x < r^3 < y.$$

Ainsi E est dense dans $\mathbb{R}$

Irrationnels

Solution 26

1. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$g'(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

Par conséquent, $g'(x) < 0$ pour $x \in]0,1]$. g est donc strictement croissante sur $[0,1]$.

2. On a en particulier $g(1)) < g(0)$. Or $g(0) = 1$ et $g(1) = e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ d'où l'inégalité voulue.

3. h est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$,

$$h'(x) = g'(x) + e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^{-x}\frac{x^n}{n!} = e^{-x}\frac{x^{n-1}}{n!}(n-2x)$$

Comme $n \geq 2$, $h'(x) < 0$ pour $x \in [0,1[$. Donc h est strictement croissante sur $[0,1]$.

4. On a en particulier $h(0) < h(1)$. Or $h(0) = 1$ et $h(1) = e^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\right)$ d'où l'inégalité voulue.

5. D'après ce qui précède, on a $a_n < n!e < a_n + 1$ avec $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$. a_n est un entier puisque $k!$ divise $n!$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Supposons $q \leq n$. Alors q divise $n!$ et $n!e$ est donc un entier compris strictement entre les deux entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$, ce qui est impossible.

6. Comme ce qui a été fait est valable pour tout $n \geq 2$. On a $q > n$ pour tout entier $n \geq 2$, ce qui est clairement impossible.

Solution 27

1. On a $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Or $\alpha > \alpha - 1 > 0$ donc $\beta > 1$. On a également $\alpha = \frac{\beta}{\beta-1}$ donc, si β était rationnel, α le serait aussi.

2. **a.** On a $p\alpha - 1 < k \leq p\alpha$. L'inégalité large ne peut être une égalité car α est irrationnel. On obtient les premières inégalités en divisant par $\alpha > 0$. On procède de même pour les secondes inégalités. En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p + q - 1 < k < p + q$, ce qui est absurde puisque $p + q - 1$ et $p + q$ sont deux entiers consécutifs.

   b. Si $A \cap B \neq \emptyset$, il existe $k \in A \cap B$ i.e. il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k = \lfloor p\alpha \rfloor = \lfloor q\beta \rfloor$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

3. **a.** Notons $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor n\alpha \rfloor < k\}$. E est non vide puisque $0 \in E$. De plus, pour tout $n \in E$, $n = \frac{n\alpha}{\alpha} < \frac{\lfloor n\alpha \rfloor + 1}{\alpha} < \frac{k+1}{\alpha}$ donc E est majorée. Enfin, E est une partie de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus grand élément que l'on note p. Comme $p + 1 \notin E$, $\lfloor (p+1)\alpha \rfloor \geq k$. Enfin $k \notin A$, donc $k \neq \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$. Ainsi $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$.
   On montre de la même manière l'existence de q.

   b. Les inégalités strictes entre entiers $\lfloor p\alpha \rfloor < k < \lfloor (p+1)\alpha \rfloor$ équivalent à $\lfloor p\alpha \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor (p+1)\alpha \rfloor - 1$. Or $\lfloor p\alpha \rfloor > p\alpha - 1$ et $\lfloor (p+1)\alpha \rfloor - 1 \leq (p+1)\alpha - 1$. Cette dernière inégalité ne peut être une égalité car α est irrationnel. Ainsi $p\alpha < k < (p+1)\alpha - 1$. Il suffit alors de diviser par $\alpha > 0$ pour obtenir les premières inégalités. On procède de même pour les secondes inégalités.
   En additionnant les deux séries d'inégalités et en tenant compte du fait que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on obtient $p + q < k < p + q + 1$, ce qui est absurde puisque $p + q$ et $p + q + 1$ sont deux entiers consécutifs.

   c. Si $A \cup B \neq \mathbb{N}^*$, il existe k qui n'est ni dans A ni dans B, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

Solution 28

1. On a $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos k\varphi$ ou encore
$$\frac{A_{k+1}}{\left(\sqrt{n}\right)^{k+1}} + \frac{A_{k-1}}{\left(\sqrt{n}\right)^{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\left(\sqrt{n}\right)^{k}}$$
ce qui équivaut à
$$A_{k+1} + nA_{k-1} = 2A_k$$
2. Puisque $A_0 = A_1 = 1$, on montre par récurrence double que les A_k sont des entiers.
3. On raisonne par récurrence. $A_0 = 1$ n'est pas divisible par n car $n \geq 3$. Supposons A_k non divisible par n pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Si A_{k+1} était divisible par n, alors $2A_k$ le serait également d'après la relation de récurrence de la question précédente. Comme n est impair, 2 est premier avec n et n divise donc A_k d'après le théorème de Gauss, ce qui n'est pas. Ainsi A_{k+1} n'est pas divisible par n. Par récurrence, aucun des A_k n'est divisible par n.
4. Supposons $\frac{\varphi}{\pi}$ rationnel : il existe donc $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $2q\varphi = 2p\pi$, puis que $\cos 2q\varphi = 1$ i.e. $A_{2q} = \left(\sqrt{n}\right)^{2q} = n^q$. Ainsi $A_{2q} = n^q$. Puisque $q \geq 1$, n divise A_{2q}, ce qui est impossible d'après la question précédente. Notre hypothèse de départ, à savoir que $\frac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$, est donc fausse.

Solution 29

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ln(2)/\ln(3)$ rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p et $q \neq 0$ tels que $\ln(2)/\ln(3) = p/q$, ie $q\ln(2) = p\ln(3)$, ie $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ d'où $2^q = 3^p$. Puisque $q \geqslant 1$, 2^q est un nombre pair, ce qui est absurde car 3^p est toujours impair.

Solution 30

Supposons pas l'absurde que
$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}.$$
Si ce nombre était rationnel, son carré le serait aussi. Mais alors, $3 = (r-\sqrt{2})^2 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2$ et donc, puisque $r \neq 0$,
$$\sqrt{2} = \frac{r^2-1}{2r} \in \mathbb{Q},$$
ce qui est absurde.

Solution 31

1. On a $x+y$ et xy dans $\mathbb{Q}$.
2. Il peut tout se passer... Par exemple
$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$
mais $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$. De même, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ mais
$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}!$$
3. On a $x+y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $x = 0$, $xy = 0 \in \mathbb{Q}$ mais par contre lorsque $x \neq 0$, $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. C'est la même situation qu'au **3.**

Solution 32

Si n est un carré parfait, $\sqrt{n}$ est un entier donc c'est un rationnel. Inversement, par contraposition, si n n'est pas un carré parfait, alors l'un au moins de ses diviseurs premiers, que nous noterons p, apparaît avec une puissance impaire dans la décomposition en facteurs premiers de n. Si donc $\sqrt{n}$ est rationnel, il s'écrit a/b avec a et b entiers d'où $nb^2 = a^2$, ce qui contredit à nouveau l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, le nombre p étant nécessairement affecté d'une puissance impaire dans le membre de gauche et d'une puissance paire dans celui de droite.

Intervalles

Solution 33

On procède par double inclusion. Par commodité, posons $\mathrm{I} = \{(1-ta)+tb,\ t \in [0,1]\}$.
Soit $x \in [a,b]$. En posant $t = \frac{x-a}{b-a}$, on a bien $x = (1-t)a + tb$. De plus, comme $a \leq x \leq b$, $t \in [0,1]$ de sorte que $x \in \mathrm{I}$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{I}$. Alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)a + tb$. De plus, $x - a = t(b-a) \geq 0$ et $b - x = (1-t)(b-a) \geq 0$.
Par conséquent, $a \leq x \leq b$ i.e. $x \in [a,b]$.

Solution 34

Raisonnons par double inclusion.

- Soit $n = 1$. On a alors
$$\left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[=]1,2[.$$
Soit $n \geqslant 2$. On a alors
$$\left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\subset]0,1[.$$
Ainsi
$$\bigcup_{n\geqslant 1} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\subset]0,1[\cup]1,2[.$$
- Il est équivalent de prouver que
$$]0,1[\subset \bigcup_{n\geqslant 2} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[.$$
Remarquons alors que $\forall n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$
Soit $x \in]0,1[$. il existe un unique entier n tel que
$$n < \frac{2}{x} \leqslant n+1,$$
et puisque $2/x > 2$, $n \geqslant 2$. On a alors
$$x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$$
et ainsi
$$x \in \bigcup_{n\geqslant 2} \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[.$$

Relations binaires

Solution 35

1. On doit vérifier trois propriétés.
Reflexivité : trivial.
Transitivité : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant_\varphi b \leqslant_\varphi c$. Cela signifie que
$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b-a| \quad \text{et} \quad \varphi(c) - \varphi(b) \geqslant |c-b|.$$
En ajoutant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire on a
$$\begin{aligned} \varphi(c) - \varphi(a) &\geqslant |c-b| + |b-a| \\ &\geqslant |c-b+b-a| = |c-a|. \end{aligned}$$

Ainsi $a \leqslant_\varphi c$.
Antisymétrie : soient a, b des réels tels que $a \leqslant_\varphi b$ et $b \leqslant_\varphi a$. Ainsi

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b - a| \quad \text{et} \quad \varphi(a) - \varphi(b) \geqslant |a - b|\,.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient

$$0 \geqslant 2|b - a| \geqslant 0\,,$$

donc $a = b$.

2. Nous présentons une preuve par chaîne d'équivalences.

$$\begin{array}{lll}
 & \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \text{ comparable à } b \\
\iff & \forall a, b \in \mathbb{R}, & a \leqslant_\varphi b \quad \text{ou} \quad b \leqslant_\varphi a \\
\iff & \forall a, b \in \mathbb{R}, & \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) \geqslant |b - a| \\ \text{ou} \\ -(\varphi(b) - \varphi(a)) \geqslant |b - a| \end{cases} \\
\iff & \forall a, b \in \mathbb{R}, & |\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant |b - a|
\end{array}$$

Nous avons utilisé le fait que la valeur absolue $|x|$ est supérieure à y si et seulement x ou son opposé $-x$ est supérieur à y.

3. L'ordre $\leqslant_{\mathrm{Id}_\mathbb{R}}$ est l'ordre habituel $\leqslant$.

Solution 36

---

1. Non, car E n'est pas une partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. En effet si x, y sont deux éléments distincts de X alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont dans E, mais ne sont pas comparables.

2. Oui, X est une borne supérieure de E. Vérification : $\mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ on a $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, donc X est un majorant de E. Supposons que $\mathrm{Y}' \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ soit aussi un majorant de E avec $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a $\{x\} \subset \mathrm{Y}$, d'où $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$. Par conséquent $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$, c'est-à-dire X est le plus petit majorant de E.

Solution 37

---

1. Il faut vérifier que la relation $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ *Le relation $\preccurlyeq$ est clairement réflexive.*

◇ *La relation est antisymétrique.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \quad \text{et} \quad y \preccurlyeq x\,.$$

On a donc $x_1 \leqslant y_1$ et $y_1 \leqslant x_1$. Ainsi $x_1 = y_1$. On a alors $x_2 \leqslant y_2$ et $y_2 \leqslant x_2$. Ainsi $x_2 = y_2$. d'où

$$x = y\,.$$

◇ *La relation est transitive*.

Soient

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

et $z = (z_1, z_2)$ tels que

$$x \preccurlyeq y \quad \text{et} \quad y \preccurlyeq z\,.$$

Si $x_1 < y_1$, puisque $y_1 \leqslant z_1$, on a $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 < z_1$, alors $x_1 < z_1$ et donc $x \preccurlyeq z$. Si $x_1 = y_1$ et $y_1 = z_1$, alors $x_1 = z_1$, $x_2 \leqslant y_2$, $y_2 \leqslant z_2$ donc $x_1 \leqslant z_2$. Ainsi $x \preccurlyeq z$.

2. *L'ordre est total.*

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Si $x_1 \neq y_1$ alors $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Si $x_1 = y_1$, puisque soit $x_2 \leqslant y_2$, soit $y_1 \leqslant x_1$, on $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

3. La partie A n'est pas mojorée au contraire de B. Cette dernière admet une borne supérieure.

◇ La partie A n'est pas majorée. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > x$ donc (x, y) ne peut majorer A.

◇ La partie B est majorée par $(3, 0)$. Déterminons l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de B; $(x, y) \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \left(2, 10^p\right) \preccurlyeq (x, y),$$

ie $2 < x$ car on ne peut avoir $\forall p \in \mathbb{N}, \ y \geqslant 10^p$. Ainsi

$$\mathcal{M} = \left\{(3, y), y \in \mathbb{N}\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ admet clairement un plus petit élément : $(3, 0)$. Ainsi B admet une borne supérieure valant $(3, 0)$ mais pas de plus grand élément puisque $(3, 0) \notin \mathrm{B}$.

Solution 38

---

1. Il faut vérifier que la relation $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

◇ *La relation est clairement réflexive.*

◇ *La relation est antisymétrique* d'après le principe de double inclusion.

◇ *La relation est transitive.*

Soient A, B et C trois parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$. On a alors $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$.

2. L'ordre n'est pas total dès que E contient au moins deux éléments distincts a et b puisqu'alors les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables par inclusion.

3. Il faut revenir aux définitions du cours.

◇ Déterminons l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de $\mathrm{U} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$; $\mathrm{F} \in \mathcal{M}$ si et seulement si

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{F} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} \subset \mathrm{F},$$

ie $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ et ainsi $\mathcal{M}$ est l'ensemble des parties de E contenant $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; cet ensemble $\mathcal{M}$ admet donc clairement un plus petit élément qui vaut $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Ainsi U admet une borne supérieure valant $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

◇ Déterminons l'ensemble m des minorants de l'ensemble $\mathrm{U} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$; $\mathrm{F} \in m$ si et seulement si

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{B},$$

ie $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et ainsi m est l'ensemble des parties de E contenues dans $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$; cet ensemble m admet donc clairement un plus grand élément qui vaut $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Ainsi U admet une borne inférieure valant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

4. En reprenant pas à pas les raisonnemlents menés ci-dessus, on prouve que toute partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ admet ine borne inférieure et une borne supérieure valant

$$\sup(\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathrm{A} \in \mathcal{F}} \mathrm{A}$$

et

$$\inf(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathrm{A} \in \mathcal{F}} \mathrm{A}.$$

Solution 39

Tout d'abord, toute classe d'équivalence est non vide puisque pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x\mathcal{R}x$ (réflexivité) et donc $x \in \mathrm{C}(x)$.
On en déduit également que tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence (la sienne).
Enfin, soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{C}(x) \cap \mathrm{C}(y) \emptyset$. Il existe donc $z \in \mathrm{C}(x) \cap \mathrm{C}(y)$. Soit $u \in \mathrm{C}(x)$. Alors $x\mathcal{R}u$ et $x\mathcal{R}z$. Par symétrie, on a également $z\mathcal{R}x$ puis $z\mathcal{R}u$ par transitivité. Mais on a également $y\mathcal{R}z$ donc $y\mathcal{R}u$ par transitivité. On en déduit que $u \in \mathrm{C}(y)$. Ainsi $\mathrm{C}(x) \subset \mathrm{C}(y)$. En échangeant les rôles de x et y, on a également $\mathrm{C}(y) \subset \mathrm{C}(x)$. Par conséquent $\mathrm{C}(x) = \mathrm{C}(y)$. Deux classes d'équivalences sont donc disjointes ou confondues.
Ceci prouve que les classes d'équivalence forment une partition de E.

Solution 40

1. On pose $f(t) = \frac{t}{e^t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et on remarque que $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$. Il est alors évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Une étude rapide donne le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède exactement deux solutions (dont l'une est évidemment x). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède deux éléments.
- Si $x = 1$, la classe d'équivalence de x ne possède qu'un élément (x lui-même) car les variations de f montrent que f ne prend qu'une seule fois la valeur $f(1) = \frac{1}{e}$.
- Si $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'équation $f(y) = f(x)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ possède une seule solution (x lui-même). Autrement dit, la classe d'équivalence de x possède un unique élément.

Solution 41

Le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence est quasi évident (il suffit d'écrire les trois axiomes).
Les classes d'équivalence sont des cercles (quitte à identifier les complexes à leurs images dans le plan complexe).

Solution 42

On remarque que pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y ont la même parité. Le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence est alors quasi évident.
La classe de 0 est évidemment $2\mathbb{Z}$ et la classe de 1 et $2\mathbb{Z}+1$. De plus, $2\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z}+1) = \mathbb{Z}$ donc ce sont les deux seules classes d'équivalence.

Solution 43

En remarquant que $x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y$, il est quasi évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff (x-y)(x+y) = x-y \\ &\iff (x-y)(x+y-1) = 0 \qquad \iff y = x \text{ ou } y = 1-x \end{aligned}$$

La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ est donc formée des réels x et $1-x$.

- Si $x = \frac{1}{2}$, alors $x = 1 - x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 1.
- Si $x \neq \frac{1}{2}$, alors $x \neq 1 - x$ et la classe d'équivalence de x est de cardinal 2.

Solution 44

---

1. **a.** **Réflexivité :** Soit $f \in \mathrm{E}^{\mathrm{E}}$. Id_{E} est une bijection de E dans E et $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}^{-1} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Ainsi $f \sim f$.
Symétrie Soit $(f, g) \in (\mathrm{E}^{\mathrm{E}})^2$ tel que $f\mathcal{R}g$. Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Mais alors

$$g = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Comme φ^{-1} est également une bijection de E dans E, $g \sim f$.
Transitivité Soit $(f, g, h) \in (\mathrm{E}^{\mathrm{E}})^3$ tel que $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$. Il existe donc deux bijections φ et ψ de E dans E telles que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ et $g = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$. Mais alors

$$f = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi = (\psi \circ \varphi)^{-1} \circ h \circ (\psi \circ \varphi)$$

Comme $\psi \circ \varphi$ est une bijection de E dans E, $f \sim h$.

b. Soit f conjuguée à Id_{E}. Alors il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \circ \varphi$, d'où $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. La classe d'équivalence de Id_{E} est $\{\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\}$.

c. Soit $f \in \mathrm{E}^{\mathrm{E}}$ une application constante. Il existe donc $a \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
Soit maintenant g une application conjuguée à f. Il existe donc une bijection φ de E dans E telle que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(a)$. Ainsi g est constante.
Réciproquement, soit $g \in \mathrm{E}^{\mathrm{E}}$ une application constante. Il existe donc $b \in \mathrm{E}$ tel que $g(x) = b$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Posons $\varphi(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b \\ x & \text{sinon} \end{cases}$. Remarquons que cette définition est valide même si $a = b$. On vérifie que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ donc φ est bijective en tant qu'involution. On vérifie également que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ donc g est conjuguée à f.
Ainsi la classe d'équivalence de f est formée de toutes les applications constantes. Autrement dit, les applications constantes forment une classe d'équivalence.

2. **a.** Posons $\varphi(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $a \neq 0$, φ est bijective et $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Ainsi f et g sont conjuguées.

b. Supposons que sin et cos soient conjuguées. Il existe donc une bijection φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\cos = \varphi^{-1} \circ \sin \circ \varphi$ ou encore $\varphi \circ \cos = \sin \circ \varphi$. En particulier, $\varphi(\cos(1)) = \sin(\varphi(1))$ et $\varphi(\cos(-1)) = \sin(\varphi(-1))$. Puisque cos est paire, $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$. Mais on a encore $\varphi(1) = \varphi(\cos(0)) = \sin(\varphi(0)) \in [-1, 1]$ et $\varphi(-1) = \varphi(\cos(\pi)) = \sin(\varphi(\pi)) \in [-1, 1]$. Or sin est injective sur $[-1, 1]$ et $\sin(\varphi(1)) = \sin(\varphi(-1))$ donc $\varphi(1) = \varphi(-1)$, ce qui contredit la bijectivité de φ (l'injectivité en fait).

Solution 45

---

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $|x - x| \leq y - y$ donc $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.
Soit $(x, y, x', y', x'', y'') \in \mathbb{R}^6$ tel que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$. On a donc $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x'' - x'| \leq y'' - y'$. Par inégalité triangulaire,

$$|x'' - x| = |(x'' - x') + (x' - x)| \leq |x'' - x'| + |x' - x| \leq (y' - y) + (y'' - y') = y'' - y$$

On a donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$, ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est transitive.
Enfin, soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$. On a donc $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x - x'| \leq y - y'$. En sommant ces deux inégalités, $2|x' - x| \leq 0$ et donc $|x' - x| = 0$ puisqu'une valeur absolue est positive. On en déduit que $x = x'$ puis que $0 \leq y' - y$ et $0 \leq y - y'$. Ceci signifie que $y \leq y'$ et $y' \leq y$ de sorte que $y = y'$. Finalement, $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

La relation $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'ordre. Par contre, les couples $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables puisque $|1 - 0| = |0 - 1| = 1 > 0 = 0 - 0$. L'ordre n'est donc pas total.

2. Montrons d'abord que $(0,\sqrt{2})$ est un majorant de A. Soit $(x,y)\in A$. Tout d'abord, $(x-y)^2\geq 0$ donc $2xy\leq x^2+y^2$. On en déduit que

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\leq 2(x^2+y^2)\leq 2$$

En particulier, $x+y\leq\sqrt{2}$.
De même, $(x+y)^2\geq 0$ donc $-2xy\leq x^2+y^2$. On en déduit que

$$(y-x)^2=x^2+y^2-2xy\leq 2(x^2+y^2)\leq 2$$

En particulier, $y-x\leq\sqrt{2}$. Finalement, $y-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}-y$ ou encore $|x|\leq\sqrt{2}-y$ donc $(x,y)\mathcal{R}(0,\sqrt{2})$.

Montrons maintenant que $(0,\sqrt{2})$ est le plus petit majorant de A. Soit (α,β) un majorant de A. Puisque $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartient à A, on a en particulier,

$$\left|\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\leq\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\qquad\left|\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\leq\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ces inégalités peuvent également s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}-\beta\leq\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\beta\leq\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sqrt{2}-\beta\leq\alpha\leq\beta\\ -\beta\leq\alpha\leq\beta-\sqrt{2}\end{aligned}$$

En particulier, $\sqrt{2}-\beta\leq\alpha\leq\beta-\sqrt{2}$, ce qui équivaut à $|\alpha|\leq\beta-\sqrt{2}$ ou encore $(0,\sqrt{2})\mathcal{R}(\alpha,\beta)$.

On peut alors affirmer que $\sup A=(0,\sqrt{2})$.

Solution 46

L'interprétation géométrique de la relation est claire : $\mathcal{C}\leq\mathcal{C}'$ signifie que le cercle $\mathcal{C}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}'$. Notons que cela implique nécessairement $R'\geq R$.

- La réflexivité est évidente.
- Si $\mathcal{C}\leq\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'\leq\mathcal{C}$, alors $OO'\leq R'-R$ et $O'O\leq R-R'$. Cela implique $R'\geq R$ et $R\geq R'$, donc $R=R'$, et donc $OO'=0$, d'où $O=O'$. Ainsi les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même centre et même rayon, donc sont égaux.
  La relation est donc antisymétrique.
- Soient trois cercles $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ tels que $\mathcal{C}\leq\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'\leq\mathcal{C}''$. On a $OO'\leq R'-R$ et $O'O''\leq R''-R'$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit :
  $$OO''\leq OO'+O'O''\leq(R'-R)+(R''-R')=R''-R\ ,$$
  ce qui prouve bien que $\mathcal{C}\leq\mathcal{C}''$.
  La relation est donc transitive.

Solution 47

1.
- La réflexivité est claire : pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $p\mathcal{R}p$ puisque $p=p^1$.
- Soient $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$. Il existe alors $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{N}^*$ tels que $q=p^n$ et $p=q^m$. Cela implique que $p^{nm}=p$. Puisque $p\neq 0$,
  $$p^{nm}=p\iff p^{nm-1}=1\iff p=1\text{ ou }nm=1$$
  Si $p=1$, on a $q=1^n=1=p$, et si $nm=1$, on a $n=m=1$ d'où $q=p^1=p$.
  La relation est donc antisymétrique.

- Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p\mathcal{R}r$.
  La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.

2. Supposons que $\{2, 3\}$ admette un majorant p. On a alors $2\mathcal{R}p$ et $3\mathcal{R}p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.
Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2, 3\}$ n'est pas majorée.

Solution 48

- La réflexivité est évidente.
- Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. On en déduit par antisymétrie de $\leq$ sur F que $f(x) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ puisque f est injective.
  La relation $\mathcal{R}$ est donc antisymétrique.
- Soient $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, d'où $f(x) \leq f(z)$ par transitivité de $\leq$ sur F, et donc $x\mathcal{R}z$.
  La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.